

# 物理学特別講義 (一般相対性理論)

西澤 篤志

2026年4月14日

# 目次

第 1 章	相対性原理	4
1.1	特殊相対性原理	4
1.2	一般相対性原理	5
1.3	等価原理	6
1.4	演習問題	7
第 2 章	曲がった時空	8
2.1	リーマン幾何学	8
2.2	座標変換と物理量の変換則	10
2.3	添字の上げ下げ	12
2.4	平行移動	12
2.5	共変微分	14
2.6	接続係数の具体形	16
2.7	演習問題	18
第 3 章	測地線方程式	19
3.1	局所慣性系の存在	19
3.2	測地線方程式	20
3.3	演習問題	23
第 4 章	曲率テンソルとエネルギー運動量テンソル	24
4.1	曲率テンソル	24
4.2	曲率テンソルの性質	25
4.3	エネルギー運動量テンソル	26
4.4	エネルギー運動量テンソルの一般的定義 (発展)	28
4.5	演習問題	30
第 5 章	Einstein 方程式	31
5.1	Einstein 方程式	31
5.2	Einstein 方程式の非相対論的極限	32
5.3	Einstein 方程式のオーダー評価	33
5.4	重力場の作用 (発展)	34
5.5	演習問題	35

第 6 章	ブラックホール	36
6.1	Schwarzschild 時空	36
6.2	Schwarzschild ブラックホールの性質	38
6.3	ブラックホールの歴史	39
6.4	ブラックホールの時空構造	40
6.5	様々なブラックホール	42
6.6	Kerr ブラックホール	43
6.7	演習問題	45
第 7 章	球対称時空での粒子の運動	46
7.1	球対称時空での粒子の運動	46
7.2	水星の近日点移動	48
7.3	光の屈折 (重力レンズ効果)	50
7.4	演習問題	52
第 8 章	宇宙論	53
8.1	宇宙原理	53
8.2	FLRW 計量と宇宙膨張	54
8.3	Friedmann 方程式	57
8.4	Friedmann 方程式の解	58
8.5	宇宙加速膨張とダークエネルギー	59
8.6	宇宙の曲率と宇宙の運命	61
8.7	宇宙の地平線と観測可能な宇宙	62
8.8	初期宇宙とインフレーション (ビッグバン以前の宇宙)	63
8.9	演習問題	64
第 9 章	重力波	65
9.1	重力波の歴史	65
9.2	重力波の波動方程式	66
9.3	重力波の伝播	68
9.4	重力波の TT ゲージへの射影	70
9.5	重力波の放射	71
9.6	重力波のエネルギー	72
9.7	連星が放射する重力波のエネルギー	74
9.8	演習問題	75

## 参考文献

- 佐藤勝彦 / 相対性理論 … 初歩的、説明が丁寧で入門向け
- 須藤靖 / 一般相対性理論 … 初級～中級、計算が丁寧、本講義と構成が似ている

- 佐々木節 / 一般相対論 … 中級、アドバンスな内容も含む、コンパクトにまとまっている
- ランダウ・リフシツ / 場の古典論 … 中級、物理的な考察力が身に付く、観測的な内容は古い

# 第 1 章

## 相対性原理

### 1.1 特殊相対性原理

1905 年、Einstein により提唱された。

特殊相対性原理

1. 物理法則は全ての慣性系において同一である。
2. 真空中を伝搬する光の速さは全ての慣性系において同一である。

1 つ目は Newton 力学でも同じ。2 つ目は Newton 力学 (光速は無有限大) と異なる点。

これらの要請を満たす座標変換が Lorentz 変換。静止系  $(t, x, y, z)$  から  $x$  軸正の方向に速さ  $v$  で運動する慣性系  $(t', x', y', z')$  に移る場合を考える。

Lorentz 変換

$$t \rightarrow t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad x \rightarrow x' = \gamma (x - vt), \quad y \rightarrow y' = y, \quad z \rightarrow z' = z, \quad (1.1)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.2)$$

Lorentz 変換の式は速度が遅い極限 ( $v/c \rightarrow 0$ ) で Galilei 変換 (Newton 力学での座標変換) に帰着する。つまり、 $v/c \rightarrow 0$  の時、 $\gamma \rightarrow 1$  なので

$$t' = t, \quad x' = x - vt. \quad (1.3)$$

Lorentz 変換の式で  $\tanh \chi \equiv v/c$  とすると、 $\gamma = \cosh \chi$  より

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi \\ -\sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

$v \rightarrow c$  で  $\chi \rightarrow \infty$  なので、 $ct' \propto ct - x$ ,  $x' \propto x - ct$  となる。つまり、運動している座標系での時間一定面  $ct' = 0$  または、空間座標一定面  $x' = 0$  はどちらも  $ct = x$  となり、 $ct - x$  平面での対角線上に  $ct'$  軸と  $x'$

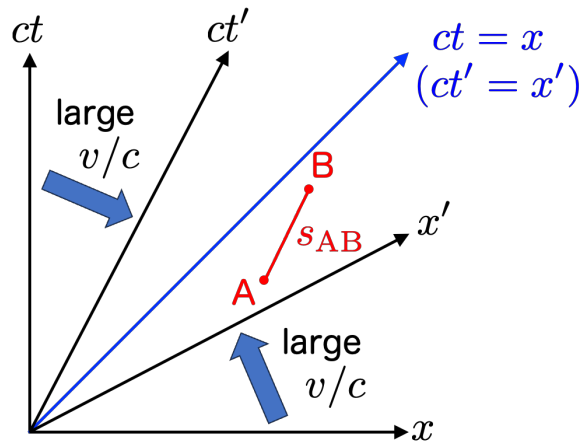


図 1.1 Lorentz 変換と座標系

軸が重なる。

図 1.1 は、運動している系  $(t', x')$  を静止系  $(t, x)$  から見ると、(i) 時計の時間がゆっくり進む  $(\Delta x' = 0)$ 、(ii) 物体の“長さ”が縮む  $(\Delta t' = 0)$ 、様子を表している。特に、後者は Lorentz 収縮と呼ばれる。

世界点 A, B 間での 4 次元距離 (世界間隔) は

$$s_{AB}^2 \equiv -c^2(t_A - t_B)^2 + (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \quad (1.5)$$

で定義される。このように距離が定義される時空は Minkowski 時空と呼ばれる。

- 光 (ヌル) :  $s_{AB}^2 = 0$
- 質量がある粒子 (時間的) :  $s_{AB}^2 < 0$
- 因果関係がない領域 (空間的) :  $s_{AB}^2 > 0$

(1.4) 式の Lorentz 変換は Minkowski 空間での回転になっており、等速で運動するどの観測者に対しても 4 次元距離を不変に保つ (→ 演習問題)。違った言い方をすると、因果律は観測者に依らず成立する。

## 1.2 一般相対性原理

1915 年、Einstein により提唱された。

特殊相対性理論は加速度系に適用できない。つまり、重力を記述できない。そこで、特殊相対性原理の「慣性系」を「局所慣性系」に置き換えたものを要請する。

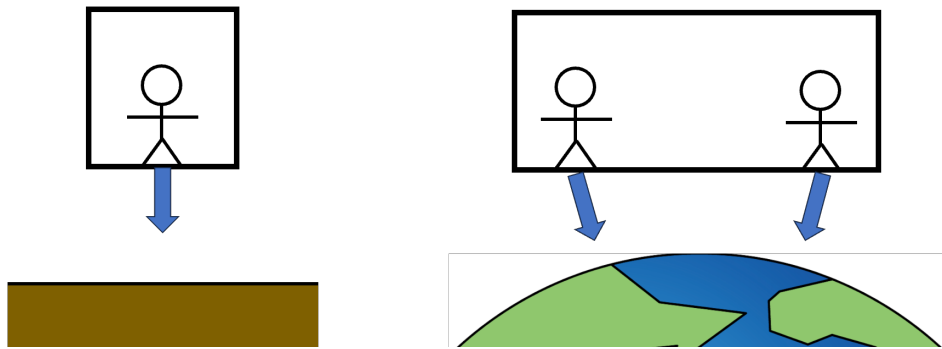


図 1.2 エレベータ中で自由落下する観測者と局所慣性系. (左) 曲率半径に対して小さな距離の場合、(右) 曲率半径に対して同等か大きな距離の場合。

一般相対性原理

1. 物理法則は全ての局所慣性系において同一である。
2. 真空中を伝搬する光の速さは全ての局所慣性系において同一である。

エレベータに乗って自由落下している観測者はエレベータに対しては静止しているので慣性系とみなせるが、地球に対して (大域的には) 慣性系ではない。このように局所的にのみ慣性系である系を局所慣性系と呼ぶ。

加速度系からいつでも局所慣性系に移れるのなら、そこでは特殊相対性理論が成り立つ。加速度系からいつでも局所慣性系に移れること (等価原理) を保証したのが一般相対性理論。→ 後で解説。

重力加速度は加速度の一種なので、一般相対性理論は重力を含む理論になっている。

### 1.3 等価原理

重力によって加速される物体を等速度運動させるためには、重力と逆向きで同じ大きさの力を加える必要がある。慣性質量を  $m_I$ 、重力質量を  $m_G$  とし、それぞれに対応する加速度を  $a_I, a_G$  と書くと、 $m_G a_G = m_I a_I$  が局所慣性系に移るための条件である。重力を打ち消すのに必要な加速度は

$$a_I = \frac{m_G}{m_I} a_G, \tag{1.6}$$

となるが、質量はそもそも力が与えられた時の物体の「加速されにくさ」であるので、力の種類が異なれば  $m_G$  と  $m_I$  は本来は無関係である。  $m_I$  が物体ごとに異なる場合、  $a_I$  も異なるので、一般の状況で局所慣性系に移るのは難しい。もし  $m_G = m_I$  であるならば、  $a_I = a_G$  となり、重力加速度とその他の力による加速度は等価になる。等価原理は慣性質量  $m_I$  と重力質量  $m_G$  が等しいことを要請し、同じ大きさの力に対して物体が同じように加速度運動することを保証する。

等価原理

$$m_G = m_I$$

現在、最も高精度な実験的検証は MICROSCPE という衛星によるもの。 $10^{-15}$  程度の精度で等価原理が正しいことが確かめられている [P. Touboul et al., Physical Review Letters 129, 121102 (2022)]。

## 1.4 演習問題

[問 1] 特殊相対論の内容で忘れていたことがあれば復習せよ。

[問 2] Lorentz 変換に対して 4 次元距離が不変に保たれることを示せ (x 軸方向への運動について示せば十分である)。

[問 3] 一般相対論と特殊相対論の違い (相対性原理や等価原理など) について簡潔に述べよ。

## 第 2 章

# 曲がった時空

### 2.1 リーマン幾何学

#### 2.1.1 曲線座標と計量

特殊相対論	一般相対論
慣性系	一般系 (非慣性系を含む)
等速運動のみ	加速度運動も含む
デカルト座標	曲線座標
Lorentz 変換	一般座標変換
Minkowski 時空	曲がった時空
(空間はユークリッド幾何学)	(空間はリーマン幾何学)

表 2.1 特殊相対論と一般相対論の比較.

#### 2.1.2 曲がった空間 (リーマン空間) での距離

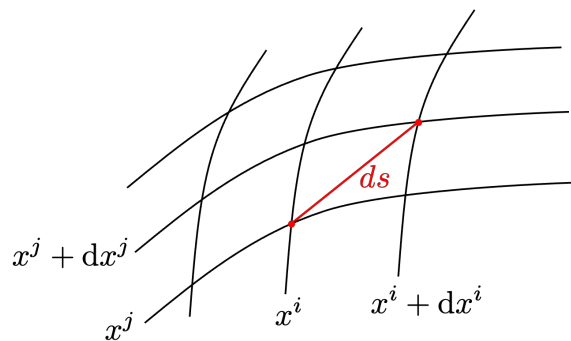


図 2.1 曲がった空間と 2 点間の距離

$$ds^2 = g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j . \quad (2.1)$$

$g_{ij}(\vec{x})$  を計量テンソルと言う。上式では Einstein の規約 (上下の同じ添字に対しては和をとる) を用いている。このように、上下の添字に対して和をとり、添字を「消す」ことを縮約と呼ぶ。

- 例: 2次元平面

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 , \quad (x^1, x^2) = (x, y) \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.2)$$

- 例: 2次元球面

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (x^1, x^2) = (\theta, \phi) \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

### 2.1.3 曲がった時空での距離

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu . \quad (2.4)$$

上式の計量テンソルの  $x$  は時空点  $x^\mu$  を表す。つまり、空間ベクトル  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$  に加え、時間成分  $x^0 = ct$  を含む。

一般相対論では、ギリシャ文字  $\mu, \nu, \rho, \dots$  を時空  $(0, 1, 2, 3)$  に対して、ローマ字  $i, j, k, \dots$  を空間  $(1, 2, 3)$  に対して用いることが多い。教科書によっては (佐藤勝彦やランダウ・リフシッツの教科書では) 逆になっているので注意。

- 例: Minkowski (ミンコフスキー) 時空:  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ .

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \implies \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.5)$$

Minkowski 時空は特殊相対論に出てくる、曲がっていない時空である。つまり、平坦な時空と言う。

- 例: Schwarzschild (シュバルツシルト) 計量:  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ .

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega , \quad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (2.6)$$

$$\implies g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} . \quad (2.7)$$

Schwarzschild 計量は静的な球対称時空を記述する。ブラックホールもその一例である。 $r_g = 2GM/c^2$  はブラックホールの半径に対応し、シュバルツシルト半径と呼ばれる。

- 例: FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) 計量:  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ .

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right], \quad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

FLRW 計量は一様等方な宇宙を記述する。 $K$  は  $0, +1, -1$  の値をとり、空間の曲率がゼロ (平坦)、正 (閉じた宇宙)、負 (開いた宇宙) の場合をそれぞれ表している。

## 2.2 座標変換と物理量の変換則

以下では、座標変換による変換則によって様々な量を定義 (分類) する。

スカラー

$$\Phi'(x') = \Phi(x). \quad (2.10)$$

つまり、スカラー量は添字が付かず座標系に依らない量として定義される。一般相対論では、時空点間の 4 次元距離は座標に依らずに一定である。つまり、異なる座標系  $x$  と  $x'$  に対して

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu. \quad (2.11)$$

であるので、 $ds^2$  はスカラーである。

反変ベクトル

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x). \quad (2.12)$$

例: 4 元速度ベクトル

$$\frac{dx'^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.13)$$

座標変換  $x' = ax^2 + by + c$  ( $t' = t, y' = y, z' = z$ ) に対しては

$$\frac{\partial x'}{\partial(ct)} = 0, \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = 2ax, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \quad (2.14)$$

より

$$\frac{dx'}{d\tau} = 2ax \frac{dx}{d\tau} + b \frac{dy}{d\tau}. \quad (2.15)$$

共変ベクトル

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) . \quad (2.16)$$

例: 勾配ベクトル

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} . \quad (2.17)$$

テンソル

•  $n$  階反変テンソル

$$T'^{\mu\nu\rho\dots}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \dots T^{\alpha\beta\gamma\dots}(x) . \quad (2.18)$$

•  $n$  階共変テンソル

$$T'_{\mu\nu\rho\dots}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \dots T_{\alpha\beta\gamma\dots}(x) . \quad (2.19)$$

•  $(m, n)$  階混合テンソル

$$T'^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \dots \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} \dots T^{\rho\sigma\dots}_{\delta\gamma\dots}(x) . \quad (2.20)$$

テンソルは 2 つのベクトルを用いて  $T^{\mu\nu} = A^\mu \otimes B^\nu$  と書けるので、ベクトルの変換則が分かれば自動的に変換則が決まる。

例: 計量テンソルは 2 階共変テンソル

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \dots g_{\alpha\beta}(x) . \quad (2.21)$$

注) 後で出てくるように、テンソルの添字は計量自身によって上げ下げできるので、2 階反変計量テンソルも存在する。

テンソルは (2.18) - (2.20) 式のような変換則を満たす量として定義される。2 階のテンソルは行列に似ているが、行列は変換則を満たすとは限らないので注意すること。

物理法則が座標変換によって不変である性質を共変性と言う。一般相対論では、全ての局所慣性系において物理法則は不変でなければならないので、共変性を満たす必要がある。そのためには、物理法則は必ず、スカラー、ベクトル、テンソルを用いて両辺の上下添字が一致するように書かれなければならない。さもないと、座標変換によって物理法則は破れてしまう！

例: 物理法則の共変性

$$T^\mu{}_\nu = A^\mu B_\nu \implies (T')^\mu{}_\nu = (A')^\mu (B')_\nu, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T^\alpha{}_\beta = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A^\alpha B_\beta, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} (T^\alpha{}_\beta - A^\alpha B_\beta) = 0. \quad (2.24)$$

## 2.3 添字の上げ下げ

計量  $g_{\mu\nu}(x)$  に対して  $g^{\mu\nu}(x)$  を

$$g^{\mu\nu}(x)g_{\nu\rho}(x) \equiv \delta^\mu{}_\rho, \quad (2.25)$$

で定義する。つまり、 $g^{\mu\nu}$  は  $g_{\mu\nu}$  の逆、 $(g_{\mu\nu})^{-1}$  になっている。

計量とその反変テンソルを用いると、ベクトルやテンソルの添字を上げ下げした量を定義できる。

添字の上げ下げ

- ベクトル

$$A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu \equiv g^{\mu\nu} A_\nu. \quad (2.26)$$

- テンソル

$$T^\mu{}_\nu \equiv g_{\nu\rho} T^{\mu\rho}, \quad T^{\mu\nu} \equiv g^{\nu\rho} T^\mu{}_\rho. \quad (2.27)$$

また、縮約をとることで、テンソルからベクトルを、ベクトルからスカラーを、テンソルからスカラーを作ることができる。

例:

$$B^\mu = A_\nu T^{\mu\nu}, \quad \Phi = A^\mu A_\mu, \quad \Psi = T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad \dots \quad (2.28)$$

注) 縮約の定義に従って計算をすると両辺の縮約されていない添字は必ず一致する。 $T^\mu{}_\nu \equiv g_{\nu\rho} T^{\mu\rho}$  では、 $\mu$  は上に付いている、 $\nu$  は下に付いている、など。もし両辺で一致していなければ、何か計算を間違っているということ。

## 2.4 平行移動

前回勉強した、ベクトルやテンソルの座標変換は時空の同一点 (物理的に同じ点) での座標変換であった。曲がった時空での物理量の変化を議論するためには、異なる時空点の関係を決めておく必要がある。

- 平坦な時空 (ユークリッド幾何) の場合 (図 1 参照)

「異なる時空点でのベクトルの差」 = 「座標点が変わることによる変化量」

$$\delta A^\mu \equiv A^\mu(x + \delta x) - A^\mu(x). \quad (2.29)$$

この定義によると、ベクトルを平行移動しても値は変わらない、つまり、平行移動したベクトルは  $\tilde{A}^\mu(x + \delta x) = A^\mu(x)$  であることを暗に用いている。異なる時空点でのベクトルの差を定義すると、微分 (変化率) を以下のように定義することができる。

$$\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\rho} \equiv \lim_{\delta x^\rho \rightarrow 0} \frac{\delta A^\mu(x)}{\delta x^\rho} \quad (2.30)$$

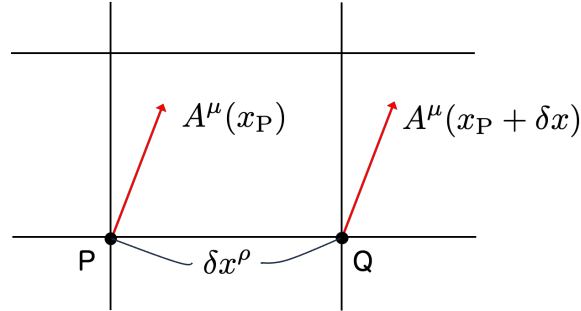


図 2.2 平坦な時空での平行移動.

- 曲がった時空 (リーマン幾何) の場合 (図 2 参照)

「異なる時空点でのベクトルの差」 = 「座標点異なることによる変化量」 + 「時空の曲がりの効果」

「座標点異なることによる変化量」は平坦な時空の場合と同じもの。時空が曲がっている場合には、平行移動させた時の時空の曲がりの効果も合わせて考慮する必要がある。直感的に分かるように、「時空の曲がりの効果」はベクトルの大きさ  $|A^\mu|$  と座標点をずらす量  $\delta x^\rho$  に比例するはずである。したがって、曲がった時空上での平行移動を以下のように定義する。

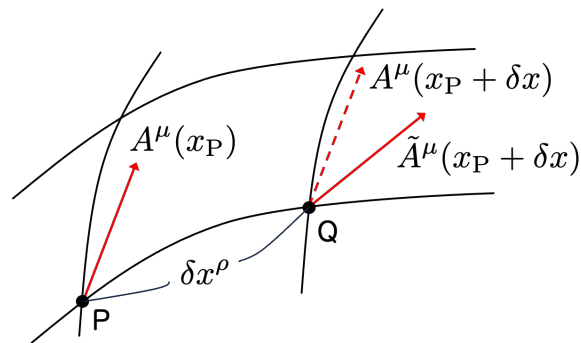


図 2.3 曲がった時空での平行移動.

曲がった時空上で平行移動したベクトル

$$\tilde{A}^\mu(x + \delta x) \equiv A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) A^\nu(x) \delta x^\rho. \quad (2.31)$$

この式に現れる比例係数  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x)$  を接続係数 (アフィン係数) と呼ぶ。この係数が時空の曲がり方を記述し、時空の各点においてベクトルがどのように平行移動されるかを定める。平坦な時空では  $\tilde{A}^{\mu}(x + \delta x) = A^{\mu}(x)$  であるので、 $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x) = 0$  である。

以上では、反変 (上付き) ベクトルを考えたが、スカラー量の平行移動はどうなるであろうか。ベクトルの内積 (例えば、 $A^{\mu}A_{\mu}$  や  $A^{\mu}B_{\mu}$ ) もスカラー量である。そこで、平行移動のもっともらしい性質として、ベクトルの大きさと任意の2つのベクトルのなす角は不変に保たれることを要請しよう。これはつまり、平行移動によりベクトルの内積が不変であることと等価である。

$\delta x$  は微小量として、その1次までで考えると

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x) &= g_{\mu\nu}(x + \delta x)\tilde{A}^{\mu}(x + \delta x)\tilde{B}^{\nu}(x + \delta x) \\
&\approx \{g_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu,\sigma}(x)\delta x^{\sigma}\} \{A^{\mu}(x) - \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}(x)A^{\rho}(x)\delta x^{\sigma}\} \{B^{\nu}(x) - \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu}(x)B^{\rho}(x)\delta x^{\sigma}\} \\
&\approx g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x) \\
&\quad + [g_{\mu\nu,\sigma}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) \{ \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}(x)A^{\rho}(x)B^{\nu}(x) + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\rho}(x) \}] \delta x^{\sigma} \\
&= g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x) \\
&\quad + [g_{\mu\nu,\sigma}(x) - g_{\rho\nu}(x)\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}(x) - g_{\mu\rho}(x)\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}(x)] A^{\mu}(x)B^{\nu}(x)\delta x^{\sigma} .
\end{aligned} \tag{2.32}$$

これが任意の  $A^{\mu}$ ,  $B^{\nu}$  について成り立つには

$$g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\rho\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - g_{\mu\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = 0 , \tag{2.33}$$

が満たされないといけない。この式は接続係数に対する制約条件であり、後で接続係数の具体形を求める時に用いる。逆に言うと、この条件を満たすように接続係数が与えられる場合、スカラー量は平行移動に対して不変である。

反変 (上付き) テンソルの平行移動は、テンソルがベクトルの直積で書けることを考えると、反変ベクトルの平行移動から導かれる。例えば、 $T^{\mu\nu} = A^{\mu}B^{\nu}$  などとすればよい。具体形は以下の節で導かれる。また、共変 (下付き) ベクトル、共変テンソルの平行移動も以下の節で導かれる。

## 2.5 共変微分

共変微分とは、曲がった時空上での微分のことである。

曲がった時空上での異なる時空点でのベクトルの差を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}A^{\mu} &\equiv A^{\mu}(x + \delta x) - \tilde{A}^{\mu}(x + \delta x) \\
&= A^{\mu}(x + \delta x) - A^{\mu}(x) + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x)A^{\nu}(x)\delta x^{\rho} \\
&= \delta A^{\mu}(x) + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x)A^{\nu}(x)\delta x^{\rho} .
\end{aligned} \tag{2.34}$$

ここで、 $\delta A^{\mu}$  は座標点異なることによるベクトルの変化量である。したがって、曲がった時空上での微分 (変化率)、つまり、共変微分は以下のように定義される。

反変ベクトルに対する共変微分

$$\nabla_{\rho} A^{\mu}(x) \equiv \lim_{\delta x^{\rho} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{D}A^{\mu}(x)}{\delta x^{\rho}} = \frac{\partial A^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x) A^{\nu}(x). \quad (2.35)$$

一般相対論では添字が沢山出てきて式がややこしくなりがちなので、簡素な表記として、普通の偏微分を  $A^{\mu}{}_{,\rho}(x)$  と表記することが多い。共変微分  $\nabla_{\rho} A^{\mu}(x)$  は普通の偏微分と区別するために  $A^{\mu}{}_{;\rho}(x)$  と表記される。高階の微分は  $A^{\mu}{}_{;\rho\sigma}(x)$ ,  $A^{\mu}{}_{;\rho\sigma}(x)$  などと表記される。共変微分は可換ではなく、ベクトルに近い側から作用させることに注意する。

反変ベクトルに対する共変微分が定義できれば、共変ベクトルに対する共変微分は通常の偏微分と同様の Leibniz (ライプニッツ) 則を要請することにより以下のように表される。

共変ベクトルに対する共変微分

$$A_{\mu;\rho}(x) = A_{\mu,\rho}(x) - \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}(x) A_{\nu}(x). \quad (2.36)$$

証明

$$\begin{aligned} (A^{\mu} B_{\mu})_{;\rho} &= A^{\mu}{}_{;\rho} B_{\mu} + A^{\mu} B_{\mu;\rho} \\ &= (A^{\mu}{}_{,\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} A^{\nu}) B_{\mu} + A^{\mu} B_{\mu;\rho} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ここで、スカラー量は平行移動に対して不変（時空の曲がりの効果を受けない）であったことを思い出そう。つまり、スカラー量に対する共変微分は通常の偏微分に置き換えることができる。したがって、(2.37) 式の左辺は

$$\begin{aligned} (A^{\mu} B_{\mu})_{;\rho} &= (A^{\mu} B_{\mu})_{,\rho} \\ &= A^{\mu}{}_{,\rho} B_{\mu} + A^{\mu} B_{\mu,\rho}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

これを (2.37) 式と比較して、任意の  $A^{\mu}$  について成り立つには

$$B_{\mu;\rho} = B_{\mu,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} B_{\nu}. \quad (2.39)$$

これで (2.36) 式が証明された。 ■

テンソルに対しても同様にして共変微分を定義することができる。

テンソルに対する共変微分

$$T^{\mu\nu}{}_{;\rho}(x) = T^{\mu\nu}{}_{,\rho}(x) + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}(x)T^{\sigma\nu}(x) + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu}(x)T^{\mu\sigma}(x). \quad (2.40)$$

一般的には、

$$\begin{aligned} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell;\rho}(x) &= T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell,\rho}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu_i}(x)T^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\sigma\mu_{i+1}\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_\ell}(x) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\ell} \Gamma_{\nu_i\rho}^{\sigma}(x)T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\sigma\nu_{i+1}\cdots\nu_\ell}(x). \end{aligned} \quad (2.41)$$

証明

まず、(2.40) 式を証明する。

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{;\rho} &= (A^\mu B^\nu)_{;\rho} \\ &= A^\mu{}_{;\rho} B^\nu + A^\mu B^\nu{}_{;\rho} \\ &= (A^\mu{}_{,\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} A^\sigma) B^\nu + A^\mu (B^\nu{}_{,\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} B^\sigma) \\ &= (A^\mu B^\nu)_{,\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} A^\sigma B^\nu + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} A^\mu B^\sigma \\ &= T^{\mu\nu}{}_{,\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} T^{\mu\sigma}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

反変ベクトルや添字が多い場合についてもベクトルの直積に置き換えれば同様に証明される。 ■

## 2.6 接続係数の具体形

ここまでは接続係数の具体形はまだ決めていなかった。スカラー量が平行移動に対して不変であるためには(2.33) 式の条件が必要であった。さらに具体形を絞り込むために、接続係数の座標変換則を考える。まず、平行移動したベクトルは座標変換則

$$\begin{aligned} \tilde{A}'^\mu(x' + \delta x') &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Big|_{x+\delta x} \tilde{A}^\nu(x + \delta x) \\ &= \left\{ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Big|_x + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \Big|_x \delta x^\rho \right\} \{ A^\nu(x) - \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu}(x) A^\sigma(x) \delta x^\rho \} + \mathcal{O}[(\delta x)^2] \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Big|_x \{ A^\nu(x) - \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu}(x) A^\sigma(x) \delta x^\rho \} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \Big|_x \delta x^\rho A^\nu(x) + \mathcal{O}[(\delta x)^2], \end{aligned} \quad (2.43)$$

に従う。一方、ベクトルの平行移動は(2.31) 式より

$$\begin{aligned} \tilde{A}'^\mu(x' + \delta x') &= A'^\mu(x') - \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x') A'^\nu(x') \delta x'^\rho \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Big|_x A^\nu(x) - \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x') \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \Big|_x A^\sigma(x) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta} \Big|_x \delta x^\beta, \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる。上の2式は同じものであるので  $\mathcal{O}[(\delta x)^2]$  のオーダーを無視して(偏微分を評価する座標  $x$  は省略して記す)

$$-\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu}(x) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} = -\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}(x') \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}. \quad (2.45)$$

ここでは縮約をとっている添字 (ダミー添字) はセットになっていれば何でもよいので、 $A^\sigma \delta x^\rho$  をくり出すように適当に付け替えているので注意すること。両辺に  $\partial x^\gamma / \partial x'^\mu$  を作用させて

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\gamma(x) - \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} = \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x') \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}, \quad (2.46)$$

を得る。ここから分かることは次の2点である。

- $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$  はテンソルではない。

(2.46) 式の左辺第2項が余分な項である。線形座標変換に対しては、左辺の第2項は消え、テンソルの座標変換則に従う。

- $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \Gamma_{\alpha\nu}^\mu$  (下付き添字に対しては対称)

接続係数の反対称部分を

$$\Gamma_{[\nu\alpha]}^\mu \equiv \frac{1}{2} (\Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu), \quad (2.47)$$

と定義すると (2.46) 式は

$$\Gamma_{[\sigma\rho]}^\gamma(x) = \Gamma_{[\nu\alpha]}^\mu(x') \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \quad (2.48)$$

と書ける。局所慣性系がとれるのであれば、その時  $\Gamma_{[\sigma\rho]}^\gamma(x') = 0$  となるので他のいかなる座標系に対しても反対称成分はゼロのままである。したがって、接続係数は下付き添字に対して対称になっている。

スカラー量が平行移動に対して不変であるための条件、(2.33) 式

$$g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^\rho = 0, \quad (2.49)$$

に再び戻り、 $\Gamma_{\mu|\nu\rho} \equiv g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^\sigma$  を定義して添字を入れ替えた式を書くと

$$g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\nu|\mu\sigma} - \Gamma_{\mu|\nu\sigma} = 0, \quad (2.50)$$

$$g_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma_{\sigma|\mu\nu} - \Gamma_{\mu|\sigma\nu} = 0, \quad (2.51)$$

$$g_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma_{\nu|\sigma\mu} - \Gamma_{\sigma|\nu\mu} = 0. \quad (2.52)$$

接続係数は下付き添字に対して対称であることに注意して (2.50) 式 + (2.51) 式 - (2.52) 式より

$$\Gamma_{\mu|\nu\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\sigma\nu,\mu}). \quad (2.53)$$

接続係数の元々の定義で書くと以下ようになる。

接続係数の具体形

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\sigma} + g_{\sigma\alpha,\nu} - g_{\sigma\nu,\alpha}). \quad (2.54)$$

接続係数は

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\sigma \end{array} \right\}, \quad (2.55)$$

と書くこともあり、クリストッフェル記号と呼ばれる。

## 2.7 演習問題

[問 1] ベクトル  $A_{\mu}$  の添字を上げてから下げると、元のベクトルに戻ること示せ。これは、つまり、 $A_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} A^{\nu}$  と  $A^{\mu} \equiv g^{\mu\nu} A_{\nu}$  の定義が矛盾していないということである。

[問 2] デカルト座標から球座標への変換、 $\{ct, x, y, z\} \rightarrow \{ct, r, \theta, \phi\}$  ( $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ ) に対して、計量  $\eta_{\mu\nu}$  はどう変換されるか。変換後の座標系で 4 次元距離  $ds^2$  を表せ。

[問 3]  $T_{\mu\nu}$ ,  $T^{\mu}_{\nu}$  に対して共変微分の表式を導け。また、その表式が一般形である (2.41) 式の特別な場合になっていることを確認せよ。

[問 4] 計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の共変微分はゼロになることを示せ。

[問 5] 2 次元球面 (半径  $R$ ) の計量  $ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  の計量テンソルを読み取れ。また、接続係数を計算せよ。

## 第3章

# 測地線方程式

### 3.1 局所慣性系の存在

前回の授業では、ベクトルの内積が平行移動に対して不変であることと、局所慣性系をとれる（接続係数がゼロになる）ことから接続係数の下付き添字が対称であることを示した。

逆に、そのように接続係数が定義されていれば、ベクトルの内積が平行移動に対して不変であることを用いて、一般座標変換によりいつでも局所慣性系に移れることを示せる。以下では、次の2つの条件

- ベクトルの内積が平行移動に対して不変（計量性）、
- 接続係数の下付き添字が対称（換率なし）、

が、あらゆる加速度は等価でありいつでも局所慣性系に移れるとする、等価原理と矛盾しないことを確かめる。

#### 証明

まず、座標変換<sup>\*1</sup>

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \frac{1}{2}C_{\mu\nu}^{\alpha}x^{\mu}x^{\nu} + \mathcal{O}(x^3), \quad (3.1)$$

を考えると、計量テンソルは次のように変換される。

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x). \quad (3.2)$$

(3.1) 式を逆に解くと

$$\begin{aligned} x^{\alpha} &= x'^{\alpha} - \frac{1}{2}C_{\mu\nu}^{\alpha}x'^{\mu}x'^{\nu} + \mathcal{O}(x^3) \\ &= x'^{\alpha} - \frac{1}{2}C_{\mu\nu}^{\alpha}x'^{\mu}x'^{\nu} + \mathcal{O}(x'^3), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\alpha} - C_{(\mu\nu)}^{\alpha}x'^{\nu} + \mathcal{O}(x'^2). \quad (3.4)$$

<sup>\*1</sup> 任意の時空座標点は  $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} - a^{\mu}$  とずらすことにより座標原点  $x^{\mu} = 0$  に移すことができるので、 $x^{\mu} = 0$  近傍で考え  $x'^{\alpha}$  は微小量とする。 $x'^{\alpha} = 0$  を座標原点ととると  $x'^{\alpha}$  は微小量となる。

ここでは、 $C_{\mu\nu}^\alpha$  は  $\mu, \nu$  に対して対称成分のみが寄与するため、対称成分を

$$C_{(\mu\nu)}^\alpha \equiv \frac{1}{2} (C_{\mu\nu}^\alpha + C_{\nu\mu}^\alpha) , \quad (3.5)$$

と書いている。

$x^\mu = a^\mu$  の任意の時空点は  $x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu$  と座標をずらすことにより  $x^\mu = 0$  の時空座標点に移すことができるので、 $x^\mu = 0$  周りで展開すると

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0) + g_{\mu\nu,\alpha}(0)x^\alpha + \mathcal{O}(x^2) . \quad (3.6)$$

これと (3.4) 式を (3.2) 式に代入して

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \left\{ \delta_\mu^\alpha - C_{(\mu\rho)}^\alpha x'^\rho \right\} \left\{ \delta_\nu^\beta - C_{(\nu\sigma)}^\beta x'^\sigma \right\} \left\{ g_{\alpha\beta}(0) + g_{\alpha\beta,\gamma}(0)x^\gamma \right\} + \mathcal{O}(x^2) \\ &= g_{\mu\nu}(0) + \left\{ g_{\mu\nu,\gamma}(0) - g_{\mu\alpha}(0)C_{(\nu\gamma)}^\alpha - g_{\nu\alpha}(0)C_{(\mu\gamma)}^\alpha \right\} x^\gamma + \mathcal{O}(x^2) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

ベクトルの内積が平行移動に対して不変であることから要請される関係式

$$g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\mu\alpha}\bar{\Gamma}_{\nu\gamma}^\alpha - g_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\gamma}^\alpha = 0 , \quad (3.8)$$

と比較すると、 $C_{(\nu\gamma)}^\alpha = \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha(0)$  と選べば  $x^\gamma$  の線形項は消える。これは、接続係数が下付き添字の入れ替えに対して対称であるから可能である。したがって、一般的に

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(0) + \mathcal{O}(x^2) , \quad (3.9)$$

と書ける。(3.9) 式を  $x^\alpha$  で微分すると  $g'_{\mu\nu,\alpha}(x') = \mathcal{O}(x)$  なので  $g'_{\mu\nu,\alpha}(0) = 0$  より  $\Gamma_{\nu\gamma}^\alpha(0) = 0$  となる。つまり、 $x^\mu$  から  $x'^\mu$  へと座標変換することにより、その時空点で時空が平坦になることが示された。したがって、任意の時空点において適切な座標変換を行えば、いつでも局所慣性系に移ることができる。ただし、 $\mathcal{O}(x^2)$  の寄与が残っていることから、少し離れた時空点では局所慣性系になるとは限らないことに注意すること。 ■

## 3.2 測地線方程式

測地線とは、時空の2点を“最短距離”で結ぶ経路である。例えば、地球上(2次元曲面)では飛行機の飛行ルート(厳密には様々な理由で大円から少しずれるが)、3次元空間では物体を自由落下させた時の軌跡、がそれである。

測地線方程式は曲がった時空上で運動する粒子や伝播する光が辿る経路を決める方程式であり、次のように与えられる。

測地線方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = F^\mu . \quad (3.10)$$

### 3.2.1 測地線方程式の導出

以下では、測地線方程式を導出する。一般に、時空上の任意の2点を  $P_1, P_2$  とする時、2点を結ぶ最短経路は最小作用の原理で求められる。その4次元距離を  $S$  と書き、経路に沿ってアフィンパラメータ  $\lambda$  を導入すると

$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\lambda) d\lambda, \quad (3.11)$$

$$L(\lambda) \equiv \frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (3.12)$$

$S$  を極小にするために、 $L$  を  $x^\alpha$  と  $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$  の関数と見なして  $S$  の変分をとる。

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta \dot{x}^\alpha \right\} d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \right\} \delta x^\alpha d\lambda. \end{aligned} \quad (3.13)$$

1行目から2行目へは第2項目を  $\lambda$  についての部分積分をした (積分の端点では  $\delta x^\alpha = 0$ )。極小では  $\delta S$  がゼロになるという条件から

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \right) - \frac{g_{\beta\gamma, \alpha} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = 0, \quad (3.15)$$

$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda$  より

$$\frac{d}{ds} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \right) - \frac{g_{\beta\gamma, \alpha}}{2} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \quad (3.16)$$

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \frac{dg_{\alpha\beta}}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - \frac{g_{\beta\gamma, \alpha}}{2} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \quad (3.17)$$

$g^{\mu\alpha}$  を両辺にかけて

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + g^{\mu\alpha} \left( \frac{dg_{\alpha\beta}}{ds} - \frac{g_{\beta\gamma, \alpha}}{2} \frac{dx^\gamma}{ds} \right) \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{g^{\mu\alpha}}{2} (2g_{\alpha\beta, \gamma} - g_{\beta\gamma, \alpha}) \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \quad (3.20)$$

最後の行では接続係数の定義式を用いた。ここで導かれた方程式が測地線方程式である。

平坦な時空では接続係数はゼロになるので、よく知っている、等速直線運動の式に帰着する。

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\mu = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0. \quad (3.21)$$

上記の導出は  $L(\lambda) = ds/d\lambda$  を用いたもので、実は  $ds^2 > 0$  の場合にのみ適用可能である。ヌル ( $ds = 0$ ) や時間的経路 ( $ds^2 < 0$ ) に対しては、非相対論的な自由粒子のラグランジアン  $L = \frac{1}{2}mv^2$  から類推して

$$L \longrightarrow L' = L^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (3.22)$$

を用いると全く同じ方程式が導かれる (演習問題 1)。一般に、ラグランジアンは運動方程式から一意に決まらないため、正しい運動方程式を導くものを採用すればよい。したがって、 $ds^2$  の符号に依らず適用できる  $L'$  を系のラグランジアンとして採用すれば良く、導かれる測地線方程式は曲がった時空上での質点の自由運動や光の伝播運動を統一的に記述する。

実際にラグランジアン  $L'$  を用いて測地線方程式を求めると

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (3.23)$$

となる。ラグランジアン  $L$  による導出では時間パラメータとして  $s$  が現れた。その  $s$  は一般座標変換により  $\lambda$  と結びついていた。しかし、ラグランジアン  $L'$  による導出では時間パラメータとしてアフィンパラメータ  $\lambda$  が現れ、

$$\lambda \longrightarrow \lambda' = a\lambda + b, \quad (3.24)$$

の変換のみが許されることになる (非線形変換に対しては方程式が不変にならない)。時間的経路、つまり、 $ds^2 < 0$  の場合には  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  とできるので、 $\lambda$  の代わりに粒子の固有時間  $\tau$  を用いることもできる。

測地線の接ベクトル  $k^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$  を導入すると、測地線方程式はベクトルの平行移動による変化量を用いて

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu k^\beta \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = \frac{Dk^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (3.25)$$

と書くことができる。すなわち、測地線の接ベクトルを平行移動してできる曲線が測地線である。

粒子に重力以外の力が作用する場合には、単に測地線方程式の右辺に 4 元力  $F^\mu$  を加えればよい。粒子の場合は固有時間  $\tau$  を用いて  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  と書け、4 元速度  $u^\mu$  は  $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$  を満たす。重力が無い ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\beta\gamma}^\mu = 0$ ) とすると、各時刻において瞬間的に  $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$  または  $u_\mu = (-c, 0, 0, 0)$  となる (粒子と一緒に運動する) 座標系をとることができる。(3.23) 式の両辺に  $u_\mu$  を縮約すると

$$u_\mu F^\mu = u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d(u_\mu u^\mu)}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d(-c^2)}{d\tau} = 0, \quad (3.26)$$

となり、 $u_\mu$  と  $F^\mu$  は直交する。 $u_\mu$  は時間方向のベクトルなので  $F^\mu$  は空間ベクトルとなり、Newton 力学と同様に独立な 3 成分を持つ。

### 3.2.2 測地線方程式の弱重力場極限

弱重力場中での運動は以下のように特徴付けられる。

- 弱重力場の計量

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1, \dots \quad (3.27)$$

• 非相対論的運動

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad |u^i| \ll c, \quad h_{\mu\nu}(x) \approx h_{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (3.28)$$

これらの条件は運動の速さは光速に比べて十分小さく、計量も時間に依存しない（静的）ということである。ここでは、自由運動する粒子を考え、アフィンパラメータを粒子の固有時間  $\tau$  に選ぶと測地線方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \\ & \approx \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \\ & = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

ここに現れる接続係数は、計量が時間に依存しないので

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (h_{0\rho,0} + h_{\rho 0,0} - h_{00,\rho}) \approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu i} h_{00,i}, \quad (3.30)$$

と簡単になる。 $\mu = 0$  の時は  $\eta^{0i} = 0$  より接続係数はゼロになり、(3.29) 式より  $d^2 t/d\tau^2 = 0$  を得る。つまり、時間  $t$  と  $\tau$  は区別しなくてもよい\*2。非自明な式は  $\mu = i$  の場合であり、測地線方程式は

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{c^2}{2} h_{00,i}, \quad (3.31)$$

となる\*3。Newton 力学では加速度は  $-\Phi_{,i}$  ( $\Phi$  は重力ポテンシャル) で与えられたことから計量の 00 成分は

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2} \Phi, \quad (3.32)$$

と対応していることが分かる。したがって、弱い重力場においては、計量の 00 成分 (Minkowski 時空からのずれ) が Newton の重力ポテンシャルの役割を果たす。

### 3.3 演習問題

[問 1] ラグランジアン

$$L' = L^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (3.33)$$

を用いて講義ノートと同様の方法で測地線方程式が導出されることを確認せよ。特に、ヌル ( $ds = 0$ ) や時間的経路 ( $ds^2 < 0$ ) に対しても問題無く導出できることに注意。

[問 2] 2次元球面 (半径  $R$ ) の計量  $ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  に対して測地線方程式を書き下せ。 $\theta$  が一定の場合、および、 $\phi$  が一定の場合が測地線 (測地線方程式の解) になっているかどうかを考えよ (地球上での飛行機の経路を想像するとよい)。

\*2 一般には、 $t = S\tau + \tau_0$  ( $S$  はスケール因子、 $\tau_0$  は定数) が許されるが、それは時間が均一に流れることを意味している。したがって、どのような  $S$  を採用したとしても空間座標を定数倍だけスケールすれば吸収できてしまうので、結局、 $S = 1$  とすればよいことになる。

\*3 平坦な時空 (Minkowski 時空) においては空間座標の添字の上下は区別しなくてよい。

## 第 4 章

# 曲率テンソルとエネルギー運動量テンソル

物体と時空の運動を統一的に記述する Einstein 方程式は、曲率テンソルとエネルギー運動量テンソルによって表される。今回の講義では、Einstein 方程式を導出するための準備として、曲率テンソルとエネルギー運動量テンソルについて解説する。

### 4.1 曲率テンソル

曲率とは物の曲がり具合を表す量である (例: 道路の曲率、球面の曲率、 $1/r$ )。計量や接続係数は座標変換により局所慣性系に移ることで平坦にできるので、時空の曲がり特徴づける物理量は広がった領域に対して定義されるべきである。曲率テンソルは以下のように定義される。

Riemann (リーマン) 曲率テンソルの定義

$$\delta A^\mu = \tilde{A}^\mu(R_2) - \tilde{A}^\mu(R_1) \equiv R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} A^\nu \delta_1 x^\rho \delta_2 x^\sigma . \quad (4.1)$$

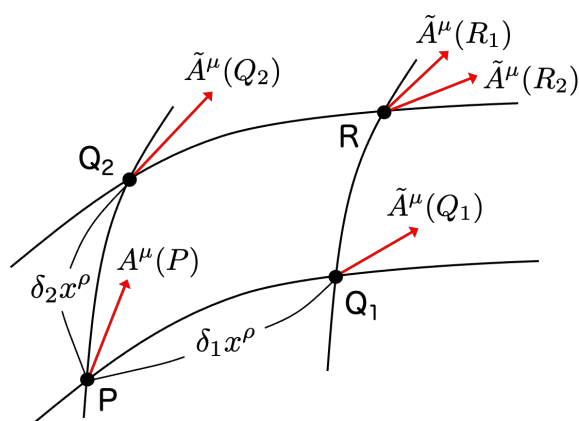


図 4.1 曲がった時空上での 2 つの経路に沿ったベクトルの平行移動.

以下では、実際に  $A^\mu$  ベクトルを 2 つの経路に沿って平行移動させ、その差を計算することで Riemann 曲

率テンソルの具体形を求める。

$$\tilde{A}^\mu(Q_1) = A^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(P)A^\nu(P)\delta_1x^\rho, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\mu(R_1) &= \tilde{A}^\mu(Q_1) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(Q_1)\tilde{A}^\nu(Q_1)\delta_2x^\rho \\ &= \tilde{A}^\mu(Q_1) - \{\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P) + \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma}\delta_1x^\sigma\}\tilde{A}^\nu(Q_1)\delta_2x^\rho \\ &\quad \dots \\ &\approx A^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho}A^\nu(\delta_1x^\rho + \delta_2x^\rho) - (\Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\rho})A^\nu\delta_1x^\rho\delta_2x^\sigma. \end{aligned} \quad (4.3)$$

上式の最後の行の量は全て P 点で評価されている。同様にして、

$$\tilde{A}^\mu(R_2) = A^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho}A^\nu(\delta_1x^\rho + \delta_2x^\rho) - (\Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma})A^\nu\delta_1x^\rho\delta_2x^\sigma. \quad (4.4)$$

(4.3) 式と (4.4) 式の差をとると

$$\begin{aligned} \delta A^\mu &= \tilde{A}^\mu(R_2) - \tilde{A}^\mu(R_1) \\ &= (\Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma})A^\nu\delta_1x^\rho\delta_2x^\sigma. \end{aligned} \quad (4.5)$$

したがって、(4.1) の定義式と比較することにより以下の具体形を得る。

Riemann (リーマン) 曲率テンソルの具体形

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\rho}. \quad (4.6)$$

## 4.2 曲率テンソルの性質

次に、Riemann テンソルの性質について考えよう。

- Riemann テンソルは計量テンソルを 2 階微分したものなので、次元は  $L^{-2}$ 。つまり、 $\sim(\text{曲率半径})^{-2}$  を表している。
- 平坦な時空では  $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$  なので、 $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0$  となる。
- 共変微分の形で書くと

$$A^\mu_{;\nu;\rho} - A^\mu_{;;\rho;\nu} = R^\mu_{\sigma\rho\nu}A^\sigma. \quad (4.7)$$

証明

(4.1) 式より

$$\begin{aligned} R^\mu_{\nu\rho\sigma}A^\nu\delta_1x^\rho\delta_2x^\sigma &= \tilde{A}^\mu(R_2) - \tilde{A}^\mu(R_1) \\ &= \{\tilde{A}^\mu(R_2) - A^\mu(P)\} - \{\tilde{A}^\mu(R_1) - A^\mu(P)\} \\ &= \mathcal{D}A^\mu(P \rightarrow Q_2 \rightarrow R_2) - \mathcal{D}A^\mu(P \rightarrow Q_1 \rightarrow R_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

両辺を  $\delta_1x^\rho\delta_2x^\sigma$  で割って  $\delta x \rightarrow 0$  の極限を考えると共変微分になるので (微分をとる順番に注意)、

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma}A^\nu = A^\mu_{;\sigma;\rho} - A^\mu_{;\rho;\sigma}. \quad (4.9)$$

$A^\mu{}_{;\sigma;\rho}$  は  $x^\sigma$  で共変微分してから  $x^\rho$  で共変微分している。共変微分同士は非可換であるので注意すること。平坦な時空では共変微分は偏微分に帰着するので可換になり、当然  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$  となる。

- 添字に関する対称性

$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma}$  に対して次の3種類の関係式が成り立つ。

$$(1) R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\nu\mu\sigma\rho} . \quad (4.10)$$

$$(2) R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} . \quad (4.11)$$

$$(3) R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0 . \quad (4.12)$$

- 自由度  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  に対して、

対称性 1 のより前 2 つの添字の入れ替え、または、後 2 つの添字の入れ替えについては反対称であるので、 $(\mu, \nu)$  または  $(\rho, \sigma)$  は  $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)$  の 6 通りを取り得る。

対称性 2 より  $(\mu, \nu)$  と  $(\rho, \sigma)$  の入れ替えについて対称であるので、 $(6^2 - 6)/2 + 6 = 21$ 。

対称性 3 は以下に示すように 1 つの拘束条件となっているので、自由度を 1 つ減らす。したがって、 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  の自由度は  $21 - 1 = 20$  となる。

対称性 3 が 1 つの拘束条件となっていることを確かめるには、実際に式を書き下してみるとよい。4 つの添字を  $(\mu, \nu)(\rho, \sigma)$  と書くと、 $(0, 1)(0, 1)$  などの場合には  $R_{0101} + R_{0110} + R_{0011}$  の第 3 項はゼロなので、 $R_{0101} = -R_{0110}$  となり、対称性 1 に帰着する。 $(0, 1)(0, 2)$  などの場合には  $R_{0102} + R_{0210} + R_{0021}$  の第 3 項はゼロになり、 $R_{0102} = -R_{0210}$  は対称性 1, 2 に帰着する。 $(0, 1)(1, 2)$  などの場合には  $R_{0112} + R_{0211} + R_{0121}$  の第 2 項はゼロになり、 $R_{0112} = -R_{0121}$  は対称性 1 に帰着する。 $(0, 1)(2, 3)$  などの場合には  $R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0$  となり、これは対称性 1, 2 に帰着しない非自明な関係式である。数字の順を入れ替えればさらに非自明な関係式が得られると思うかもしれないが、対称性 1, 2 を用いると同じ式に帰着することが分かる。

- Bianchi (ビアンキ) 恒等式

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\alpha} + R_{\mu\nu\sigma\alpha;\rho} + R_{\mu\nu\alpha\rho;\sigma} = 0 . \quad (4.13)$$

- Ricci (リッチ) テンソル、Ricci スカラー (スカラー曲率)

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho{}_{\mu\rho\nu} , \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (4.14)$$

Ricci テンソルは定義から  $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\alpha} R_{\alpha\mu\rho\nu} = g^{\rho\alpha} R_{\rho\nu\alpha\mu} = R^\alpha{}_{\nu\alpha\mu} = R_{\nu\mu}$  となり、対称テンソルである。

### 4.3 エネルギー運動量テンソル

曲率が無視できるほど十分な小さな (近似的に平坦な) 時空領域において、完全流体 (粘性や摩擦が無い流体) が熱平衡状態にある場合、そのエネルギー運動量テンソルはエネルギー密度  $\rho c^2$  と統計的に等方な運動量、つまり、圧力  $p$  によって特徴付けられるはずである。エネルギー密度と圧力は同じ次元を持つので、静止

系においてはエネルギー-運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, p, p, p), \quad (4.15)$$

と与えられる。

次に、曲がった時空 (計量は任意の  $g_{\mu\nu}$  で与えられる) において、完全流体が基準系に対して 4 元速度  $u^\mu$  で運動している場合には、エネルギー-運動量テンソルは係数  $a, b$  を導入して一般に

$$T^{\mu\nu} = a u^\mu u^\nu + b g^{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

の形に書けるであろう。静止系においては (4.15) 式に帰着しなければならないので、 $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$ ,  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$  より  $a c^2 - b = \rho c^2$ ,  $b = p$  となり、 $a = \rho + p/c^2$ ,  $b = p$  を得る。したがって、エネルギー-運動量テンソルは次のようになる。

完全流体のエネルギー-運動量テンソル

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p \left( g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu \right). \quad (4.17)$$

$\rho, p$  は熱平衡状態の質量密度と圧力として導入したが、これらが全く同じ意味を持っていなくても  $T^{\mu\nu}$  が同様の形になる場合には、完全流体のエネルギー-運動量テンソルと呼ばれる<sup>\*1</sup>。

#### 完全流体のエネルギー-運動量テンソルの性質

- $T^{\mu\nu}$  は定義式から分かるように  $\mu, \nu$  に対して対称である。
- 平坦時空で基準系に対して速度  $\vec{v}$  で運動している流体

$$u^\mu = \gamma(c, \vec{v}), \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.18)$$

$$T^{00} = \gamma^2 \rho c^2, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \gamma^2 c \left( \rho v^i + \frac{p}{c^2} v^i \right) \\ &= \frac{\gamma^2}{c} (\rho c^2 + p) v^i, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \gamma^2 \rho v^i v^j + p \left( \delta^{ij} + \frac{\gamma^2}{c^2} v^i v^j \right) \\ &= p \delta^{ij} + \gamma^2 \left( \rho v^i + \frac{p}{c^2} v^i \right) v^j. \end{aligned} \quad (4.21)$$

$T^{00}, T^{0i}, T^{ij}$  はそれぞれ、エネルギー-密度、運動量密度  $\times c$  (または、エネルギー-流束  $/c$ )、運動量流束、と解釈される。

\*1 英語では stress-energy tensor と呼ぶことが多い。

- 保存則

エネルギー保存則 (平坦な時空)

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -c \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} . \quad (4.22)$$

運動量保存則 (平坦な時空)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{0j}}{\partial t} = - \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} . \quad (4.23)$$

したがって、 $x^0 = ct$  に注意して以上をまとめると、エネルギー運動量テンソルに対する保存則 (平坦な時空) は次のように与えられる。

$$T^{0\mu}_{,0} = -T^{i\mu}_{,i} \quad \longrightarrow \quad T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 . \quad (4.24)$$

これを曲がった時空に拡張するには偏微分を共変微分に置き換えればよい\*2。

エネルギー運動量保存則

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 . \quad (4.25)$$

#### 4.4 エネルギー運動量テンソルの一般的定義 (発展)

$T^{\mu\nu}$  の一般的定義とそれが上で導いたエネルギー運動量保存則を満たすことは以下のようにして示すことができる (エネルギー運動量保存則を満たす  $T^{\mu\nu}$  をエネルギー運動量テンソルの一般的定義と解釈する)。

##### 証明

考える系のラグランジアンを  $\mathcal{L}$  として、作用

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x , \quad (4.26)$$

は一般座標変換に対して不変である\*3。以下ではこの事実を利用して任意の一般座標変換に対して成り

\*2 平坦な時空から曲がった時空への拡張は多くの場合、偏微分を共変微分で置き換えることによって得られる。

\*3  $\sqrt{-g} d^4x$  は不変体積要素と呼ばれ、一般座標変換に対して不変である。以下では一般座標変換に対して

$$d^4x' = J d^4x , \quad J \equiv \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| , \quad (4.27)$$

のヤコビアン  $J$  を決める。まず一般座標変換に対する計量の変換則は

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} , \quad (4.28)$$

である。(4.28) 式の行列式をとり

$$-g' = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right| \left| \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \right| (-g) = J^2 (-g) , \quad (4.29)$$

ここで、 $-g, -g'$  はそれぞれ  $g_{\mu\nu}, g'_{\mu\nu}$  の行列式である。したがって、 $J = \sqrt{-g}/\sqrt{-g'}$  となり、

$$\sqrt{-g'} d^4x' = \sqrt{-g} d^4x , \quad (4.30)$$

立つべき方程式を導く。手順としては、まず計量のずれに対する変分を計算し、あとで計量のずれを一般座標変換と関係づける。 $\mathcal{L}$  は一般に  $g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\rho}$  を含むので、 $S$  の計量に対する変分  $\delta S$  は

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} \delta g^{\mu\nu}_{,\rho} \right\} d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} \right] \delta g^{\mu\nu} \right\} d^4x \\ &= -\frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x.\end{aligned}\tag{4.31}$$

2行目では部分積分を行い、最後の行では

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \right],\tag{4.32}$$

を定義した\*4。次に、ゲージ変換（微小な座標変換）

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu,\tag{4.33}$$

に対して計量は次のように変換する。

$$\begin{aligned}g'^{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x) \\ &= g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\beta} \xi^\nu_{,\beta} + g^{\alpha\nu} \xi^\mu_{,\alpha} + \mathcal{O}(\xi^2).\end{aligned}\tag{4.34}$$

一方、左辺は

$$\begin{aligned}g'^{\mu\nu}(x + \xi) &= g'^{\mu\nu}(x) + g'^{\mu\nu}_{,\rho}(x) \xi^\rho \\ &= g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\nu}_{,\rho}(x) \xi^\rho + \mathcal{O}(\xi^2).\end{aligned}\tag{4.35}$$

(4.34), (4.35) 式より

$$\begin{aligned}\delta g^{\mu\nu} &= g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) \\ &= g^{\mu\beta}(x) \xi^\nu_{,\beta} + g^{\alpha\nu}(x) \xi^\mu_{,\alpha} - g^{\mu\nu}_{,\rho}(x) \xi^\rho \\ &= \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

これを (4.31) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} (\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{c} \int \{ (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - T^{\mu\nu}_{;\nu} \xi_\mu \} \sqrt{-g} d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int T^{\mu\nu}_{;\nu} \xi_\mu \sqrt{-g} d^4x = 0.\end{aligned}\tag{4.37}$$

が証明される。

\*4 このように定義するのは恣意的に思えるかもしれないが、結果的にエネルギー運動量保存則を満たす関数形であればよいという考えである。

最後の行に移るところでは第一項が表面積分でゼロになることを用いた。 $\delta S$  はゼロであり、それが任意の  $\xi^\mu$  に対して成り立たなければならないことから  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  を得る。したがって、上で定義した量  $T^{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルの一般形であると結論される。

■

電磁場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (4.38)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}, \quad (4.39)$$

与えられる。これを (4.32) 式に代入し計算すると次のエネルギー運動量テンソルが得られる。

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (4.40)$$

これは特殊相対論に出てきた電磁場のエネルギー運動量テンソルの一般化 ( $\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$ ) になっている。 $F_{\mu\nu}$  については  $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$  なので、形が変わらないことに注意する。

Minkowski 時空の場合には

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

となるので、(4.40) 式に代入すると、電磁場のエネルギー密度

$$T^{00} = W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \quad (4.42)$$

Poynting ベクトル

$$T^{0i} = S_i = \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i}{4\pi}, \quad (4.43)$$

Maxwell の応力テンソル

$$T^{ij} = \sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[ -E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) \right], \quad (4.44)$$

が得られる。

## 4.5 演習問題

[問 1] Riemann テンソルの導出を自分の手で追って確認せよ。

[問 2] Riemann テンソルの添字に対する対称性が成り立っていることを Riemann テンソルの具体形を用いて確認せよ。

[問 3] 2次元球面 (半径  $R$ ) の計量  $ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  に対して Riemann テンソル、Ricci テンソル、Ricci スカラーを計算せよ。

## 第 5 章

# Einstein 方程式

### 5.1 Einstein 方程式

Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (5.1)$$

Einstein 方程式は時空とエネルギー源 (物体、流体、場など) を関係付ける、一般相対論の基礎となる方程式である。1915 年に Einstein により発表された一般相対性理論の中で提唱された方程式であるが、一意に導出されるわけではない。幾つか考える候補の中で最も簡単であろう形が Einstein 方程式である。以下では、一般相対論において重力が満たすべき性質から方程式の形を推測する。

1. 重力が弱い極限で Poisson 方程式を含む。つまり、

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho . \quad (5.2)$$

Poisson 方程式は左辺が重力を記述し、右辺は物質を記述する。

2. 一般座標変換に対して不変 (一般共変性を満たす)。  
→ テンソル (ベクトル、スカラーも含む) で記述される。  
→ 重力 (時空) に関しては  $g_{\mu\nu}$ ,  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$  ( $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$  はテンソルではない), エネルギー源に対しては  $T_{\mu\nu}$  がある。
3.  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量保存則を満たす。つまり、 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ 。Einstein 方程式の右辺が  $T^{\mu\nu}$  で記述されるとしたら、左辺を  $G^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}, R_{\mu\nu}, R)$  と表した時に  $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  が満たされるはずである。
4. Bianchi 恒等式

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\alpha} + R_{\mu\nu\sigma\alpha;\rho} + R_{\mu\nu\alpha\rho;\sigma} = 0 . \quad (5.3)$$

を  $g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$  で縮約したものは

$$\begin{aligned} R_{;\nu} - 2R_{\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho} &= 0 . \\ g^{\mu\nu}R_{;\nu} - 2R^{\mu\rho}{}_{;\rho} &= 0 . \\ \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right)_{;\nu} &= 0 . \end{aligned} \quad (5.4)$$

したがって、

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \quad (5.5)$$

は  $G^{\mu\nu}$  の候補になる。

5.  $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  なので、 $g^{\mu\nu}$  に比例する項は付け加えてもよい。

$$(G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \quad (5.6)$$

以上の性質を全て満たすもので最も簡単なものは

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (5.7)$$

である。ここで現れた比例定数  $\kappa$  は後で Newton 力学の Poisson 方程式を再現するように決定される。

$G^{\mu\nu}$  は Einstein テンソルと呼ばれる。 $\Lambda g^{\mu\nu}$  は宇宙項と呼ばれており、真空エネルギーに対応するものである。Einstein により宇宙膨張に関連して導入された。

## 5.2 Einstein 方程式の非相対論的極限

非相対論的極限をとるには地球周りのような状況を考えればよい。そこでは、宇宙膨張は効かないので  $\Lambda = 0$  と仮定してもよいであろう。そうすると、Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.8)$$

より

$$g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = R - 2R = -R = \kappa T. \quad (5.9)$$

したがって、

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad T \equiv T^\mu{}_\mu. \quad (5.10)$$

と書ける。次に、弱重力場の極限を考える。

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (5.11)$$

$$|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1, \quad h_{\mu\nu}(x) \approx h_{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (5.12)$$

(5.10) 式左辺の 00 成分を考えると

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^\mu{}_{0\mu 0} \\ &= \Gamma_{00,\mu}^\mu - \Gamma_{0\mu,0}^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu \Gamma_{00}^\nu - \Gamma_{\nu 0}^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu \\ &\approx \Gamma_{00,i}^i \\ &= -\frac{1}{2}h_{00,ii} \\ &= \frac{1}{c^2}\Phi_{,ii}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

3行目では、 $\Gamma \sim h_{,i}$  であるので、その高次項は無視した。また、非相対論的運動、つまり、準静的な状況を考えているので、時間に関する微分は空間に関する微分に比べて小さいため無視した。一方、(5.10) 式の右辺は非相対論的な場合には  $T_{\mu\nu} \approx \text{diag}(\rho c^2, p, p, p) \approx \text{diag}(\rho c^2, 0, 0, 0)$ ,  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  より

$$\kappa \left( T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \approx \kappa \left( \rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right) = \frac{\kappa}{2} \rho c^2. \quad (5.14)$$

以上をまとめると、Einstein 方程式の非相対論的極限は

$$\Delta \Phi = \frac{\kappa c^4}{2} \rho. \quad (5.15)$$

この式が Newton 力学における Poisson 方程式  $\Delta \Phi = 4\pi G \rho$  と一致しないといけないので、

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (5.16)$$

したがって、Einstein 方程式は比例係数も含めて (5.1) 式のように求まる。

### 5.3 Einstein 方程式のオーダー評価

$\Lambda = 0$  の場合を考えると、Einstein 方程式は (5.9) 式より

$$R = -\kappa T \approx \frac{8\pi G}{c^2} \rho. \quad (5.17)$$

と書けた。2つ目の等号では非相対論的近似  $p \ll \rho c^2$  を用いた。物理定数など具体的な数値を代入すると

$$R \approx 2 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2} \left( \frac{\rho}{10^3 \text{ kg m}^{-3}} \right). \quad (5.18)$$

Ricci スカラーは長さ逆 2 乗の次元だったので、重力場の曲率半径は

$$L \approx 2 \times 10^{11} \text{ m} \sqrt{\frac{10^3 \text{ kg m}^{-3}}{\rho}}. \quad (5.19)$$

- 地球の場合

地球の質量:  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ , 地球の半径:  $6 \times 10^3 \text{ km}$ .

→ 地球の平均密度:  $\rho = 7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

→ 時空の曲率半径:  $L \approx 8 \times 10^7 \text{ km}$ .

地球の半径よりずっと大きいので、時空はほぼ平坦である、つまり、重力場は弱いと言える。

- 太陽の場合: 太陽の質量:  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ , 太陽の半径:  $7 \times 10^5 \text{ km}$ .

→ 太陽の平均密度:  $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

→ 時空の曲率半径:  $L \approx 2 \times 10^8 \text{ km}$ .

太陽の半径より 30 倍ほど大きいだけなので、地球よりは時空が曲がっている効果は効きやすい。とはいえ、重力場は弱い。

したがって、地球や太陽の重力場に対しては Newton 重力でほぼ問題無い。一般相対論的效果が重要になってくるのは時空の曲率半径  $L$  と物理的半径  $r$  の比、つまり、

$$\frac{L}{r} \sim \frac{1}{\sqrt{Rr}} \sim \frac{c}{\sqrt{G\rho r}} \sim \sqrt{\frac{rc^2}{GM}}. \quad (5.20)$$

がより小さくなる時である。ここで、 $M$  は物体の質量。ここでの記号  $\sim$  はオーダーが等しいことを表す。実際、重力が強い極限では  $L/r$  は 1 程度になり、その時の半径  $r \sim GM/c^2$  はおよそブラックホール半径になる。さらに  $r$  が小さい領域はブラックホールの内部なので、我々が観測できる範囲ではブラックホール半径での重力が最も強い。

## 5.4 重力場の作用 (発展)

重力場の作用も物質と同様に、ラグランジアン密度  $\mathcal{L}_g$  の 4 次元体積での積分で与えられるだろう。曲がった時空では体積の定義が計量に依存しているので、一般座標変換に対して不変な体積を考えなければならない。そのような不変体積要素は  $\sqrt{-g}d^4x$  で与えられる (前回の講義ノート、注釈 1 参照)。したがって、重力場の作用は

$$S_g = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.21)$$

と書ける。ラグランジアン密度はスカラー量でなければならないので、候補は

$$\mathcal{L}_g = a + bR + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \dots, \quad (5.22)$$

と書ける。しかし、Einstein 方程式は曲率に対して線形であり、作用  $S_g$  に対して計量  $g_{\mu\nu}$  についての変分をとった時に  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  などから線形項が出てくるので、曲率の高次項は不要である。以上から重力場の作用は

$$S_g = \frac{1}{c} \int (a + bR) \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.23)$$

という形になることが分かる。 $\sqrt{-g}$  も計量を含んでいることに注意して、 $g_{\mu\nu}$  についての変分をとると

$$\delta S_g = \frac{1}{c} \int \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (a + bR) \delta g_{\mu\nu} + b (R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right\} \sqrt{-g} d^4x. \quad (5.24)$$

ここで、

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad (5.25)$$

を用いた。

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu})_{;\alpha} - (\delta \Gamma^\alpha_{\mu\alpha})_{;\nu}, \quad (5.26)$$

$$\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \{ (\delta g_{\mu\beta})_{;\nu} + (\delta g_{\nu\beta})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\beta} \}, \quad (5.27)$$

より

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu})_{;\alpha}, \quad (5.28)$$

と書けることから、この項は積分の表面項となり運動方程式に寄与しない。したがって、(5.24) 式は

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{1}{c} \int \left\{ -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(a + bR) + bR^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ -\frac{a}{2}g^{\mu\nu} + bG^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (5.29)$$

となる。一方で、物質のエネルギー-運動量テンソルに対して  $g_{\mu\nu}$  で変分をとると (前回の講義ノート、(31) 式参照)

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (5.30)$$

$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0$  より

$$-\frac{a}{2}g^{\mu\nu} + bG^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0. \quad (5.31)$$

$b = 1/(2\kappa)$ ,  $a = -\Lambda/\kappa$  と選ぶと Einstein 方程式

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (5.32)$$

が得られる。つまり、Einstein 方程式を導く重力場の作用は

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.33)$$

であることが分かった。特に、この作用は第 1 項 (宇宙項がない場合) は Einstein-Hilbert (アインシュタイン・ヒルベルト) 作用と呼ばれている。

## 5.5 演習問題

[問 1] スカラー曲率を与える式、(5.17) 式から地球や太陽の曲率半径を自分で見積もってみよ。また、地球や太陽をどれくらい圧縮すれば、物理的半径と時空の曲率半径が同程度になるか。

[問 2](発展) 重力場の作用、(5.33) 式に対して  $g_{\mu\nu}$  で変分をとり、物質 (エネルギー源) に対する変分、(5.30) 式との和を考えることで Einstein 方程式が得られることを確認せよ (講義ノートの計算を逆に追えばよい)。

## 第6章

# ブラックホール

### 6.1 Schwarzschild 時空

Einstein 方程式の漸近的平坦、球対称、真空解は静的 (static) なものに限られ、そのような解は Schwarzschild (シュバルツシルド) 解 (または、計量) と呼ばれている。漸近的平坦というのは、無限遠で平坦時空になるという性質である。真空解というのは、物体の外側に物質が存在しないということなので、星や太陽などエネルギー (重力源) が近似的に球対称に分布している場合にも外側は Schwarzschild 時空で記述される。特に、重力が強い場合には光すら外に出て来れない時空領域が生じ、その時空領域は Schwarzschild ブラックホールと呼ばれる。

導出 (Einstein 方程式の解を求める)

球対称性から計量は次のような形に限られる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{00}(t, r)(cdt)^2 + 2g_{01}(t, r)dtdr + g_{11}(t, r)dr^2 + g_{\Omega\Omega}(t, r)d\Omega^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

得られる解は静的 ( $t$  に依存せず、時間反転に対して対称) であることが期待されるので<sup>\*1</sup>、静的であるとする  
と計量は以下の形に絞り込まれる。

$$ds^2 = g_{00}(r)(cdt)^2 + g_{11}(r)dr^2 + g_{\Omega\Omega}(r)d\Omega^2. \quad (6.2)$$

ここで、 $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  である。動径方向の座標は座標変換により都合良くとることができるので、 $g_{\Omega\Omega}(r) = r^2$  となるようにとる。また、 $g_{00}(r)$ 、 $g_{11}(r)$  は  $r$  の関数であるので、それぞれ任意関数を導入して  $-e^{\nu(r)}$ 、 $e^{\lambda(r)}$  と書く。したがって、計量は座標系  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$  において

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}(cdt)^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (6.3)$$

という形になる。計量が与えられれば、接続係数、Riemann テンソル、Ricci テンソル、Ricci スカラーを計算することができ、Einstein 方程式の左辺、 $G_{\mu\nu}$  を書き下すことができる。Einstein 方程式の右辺は今、真空を考えているので、 $T_{\mu\nu} = 0$  である。

<sup>\*1</sup> 時間依存性を残したまま計算しても時間  $t$  に依存しないことが導かれる。詳しくは、ランダウ・リフシッツ / 場の古典論、を参照のこと。

まず、接続係数は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu', & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -r\sin^2\theta e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta.\end{aligned}\tag{6.4}$$

これら以外の成分は全てゼロになる。ここで、プライムは  $r$  での微分を表す。接続係数が求まると、Ricci テンソルは

$$\begin{aligned}R_{00} &= e^{\nu-\lambda} \left[ \frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right], \\ R_{11} &= -\frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r}, \\ R_{22} &= 1 - e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right], \\ R_{33} &= \sin^2\theta R_{22}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

これら以外の成分はゼロになる。これらから Ricci スカラーは

$$R = e^{-\lambda} \left( -\nu'' - \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda' - \nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \left[ 1 - e^{-\lambda} \left\{ 1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right\} \right].\tag{6.6}$$

したがって、Einstein テンソル

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\tag{6.7}$$

は

$$\begin{aligned}G_{00} &= \frac{e^\nu}{r^2} [1 - e^{-\lambda}(1 - r\lambda')], \\ G_{11} &= -\frac{e^\lambda}{r^2} [1 - e^{-\lambda}(1 + r\nu')], \\ G_{22} &= \frac{r^2 e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \\ G_{33} &= \sin^2\theta G_{22},\end{aligned}\tag{6.8}$$

となり、これら以外の成分はゼロである。

まず、Einstein 方程式の 00 成分、 $G_{00} = 0$  より

$$G_{00} = \frac{e^\nu}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] = 0.\tag{6.9}$$

つまり、括弧の中は定数なのでそれを  $r_g$  とおくと

$$1 - e^{-\lambda} = \frac{r_g}{r} \quad \longrightarrow \quad e^\lambda = \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1}.\tag{6.10}$$

次に、 $G_{11}$  の括弧の中は  $G_{00}$  の括弧の中で  $\lambda' \rightarrow -\nu'$  としたものであるので、 $\lambda' = -\nu'$  が成り立てば、 $G_{11} = 0$  は満たされる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(\lambda + \nu) &= 0, \\ \lambda &= -\nu + A, \\ e^\nu &= e^A \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right).\end{aligned}\tag{6.11}$$

(6.11) 式を  $G_{22} = 0$  に代入すると

$$-\lambda'' + (\lambda')^2 - 2\frac{\lambda'}{r} = 0, \quad (6.12)$$

となり、(6.10) 式はこの微分方程式を満たしているので、 $G_{22} = 0$  は新たな情報は与えない。 $G_{33} = 0$  は  $G_{22} = 0$  と同じである。以上、Einstein 方程式を解いて得た解をまとめると、計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) e^A c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.13)$$

となる。時間座標の取り方はまだ指定しなかったので、 $t$  を適当にスケールし、 $e^A dt^2 \rightarrow dt^2$  とできるであろう。したがって、球対称、かつ真空解は以下の計量で与えられる。

Schwarzschild 計量 (解)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.14)$$

## 6.2 Schwarzschild ブラックホールの性質

- 漸近的平坦性：  $r \rightarrow \infty$  の時、 $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ .
- 非相対論的極限：

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2} \phi = \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r}. \quad (6.15)$$

Schwarzschild ブラックホール計量の  $g_{00}$  成分と比較して

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (6.16)$$

ここで導入された  $r_g$  は重力が非常に強くなり、時間の進みが非常に遅くなる、または、空間が大きく引き伸ばされる、半径を表している\*2。この半径を Schwarzschild 半径と呼ぶ。

- ブラックホールである理由：

$r = r_g$  付近の観測者 ( $r > r_g$  かつ  $r, \theta, \phi$  は一定) を考えると、観測者の固有時間 (観測者の時計で測る時間)  $\tau$  では  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  である。したがって、無限遠の観測者が測る時間  $t$  との関係は

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t, \quad (6.17)$$

である。 $r \rightarrow r_g$  とした時、 $\Delta\tau \rightarrow 0$  となるので、 $r_g$  付近では時間の進みが非常に遅くなる。つまり、無限遠の観測者から“ブラックホール”に落ちていく物体を見ていると長い時間が経っても物体は  $r_g$  より内側に落ちていかないことになる。逆に考えると、 $r_g$  で発せられた光は無限遠の観測者に到達するのに無限大の時間がかかることになる。したがって、 $r_g$  より内側からの光は  $r > r_g$  の観測者に届か

\*2 実際、 $r \rightarrow r_g$  で、 $g_{00} \rightarrow 0$ ,  $g_{11} \rightarrow \infty$  となる。この発散は座標の取り替えにより避けることができるので、見かけの発散 (特異点) である。そのような座標とは、次回の授業で出てくる、Kruskal (クルスカル) 座標のことである。

ず、真っ暗な天体 (ブラックホール) として “見える” ことになる。 $r = r_g$  の球面は事象の地平面と呼ばれる。

- ブラックホールに落ちて行く人 :

落ちていく観測者の時計の時間  $\tau$  は局所慣性系の時間なのでその観測者にとっては普通に進む。つまり、落ちていく観測者は何事も無く  $r = r_g$  の地平面を通過し、ブラックホールに落下していく。ただし、 $r = r_g$  付近では  $g_{11} \rightarrow \infty$  となるので、空間が大きく引き伸ばされ、有限の大きさの物体は引き裂かれてしまう。

- 特異点 (singularity) :

$r < r_g$  では  $\Delta\tau$  は虚数になる。

→ 同じ場所に滞在する解が存在しない\*3ということは、観測者は静止できず落下していく。

→ 落下したエネルギー (物体や光など) は  $r = 0$  に集中し、その点ではエネルギー密度が発散する。

実際、 $r = 0$  では  $|g_{00}| \rightarrow \infty$  となる。この発散は座標変換により取り除くことができないので、真の特異点と呼ばれる。一方、事象の地平面は座標変換によって取り除くことができるので、見かけの特異点と呼ばれる。

- 重力的赤方偏移 :

光の振動数は単位時間辺りの波の振動回数である。無限遠の観測者の時計で測って、時間間隔  $\Delta t$  で  $N$  回振動する光を考えよう。その振動数は  $f_\infty = N/\Delta t$  である。ブラックホール近傍の観測者の時計とは (6.17) 式で関係付いているので、

$$f_\infty = \frac{N}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \left( \frac{N}{\Delta\tau} \right) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} f_{\text{BH}}, \quad (6.18)$$

となる。つまり、ブラックホール近傍の発せられた光の波長は無限遠に到達する時には重力により大きく引き伸ばされ、振動数は減少する。この現象は非常に深い重力ポテンシャルを登るのに光子のエネルギーが費やされたと解釈することもできる。このように、高い振動数の光 (青い側の光) が低い振動数の光 (赤い側の光) に引き伸ばされることを赤方偏移と言う。

## 6.3 ブラックホールの歴史

- ドイツの有名な天文学者であった、K. Schwarzschild (1873–1916) が一般相対性理論の発表の直後 (数週間後) に球対称真空解を発見し、1916年に論文が発表された。
- しかし、ブラックホールの存在 (本当に現実の宇宙で特異点を持つ天体が形成されるのか) については懐疑的な意見があり、論争が続いた。
- 1965年に R. Penrose が現実的な状況 (完全に球対称ではない、エネルギー密度が正) で星の重力崩壊により特異点を持つ天体が形成されることを厳密に示した。

\*3  $r > r_g$  では  $\Delta\tau$  は実数になるので、 $r, \theta, \phi$  が一定という解が存在する。例えば、ブラックホールの外側へ向かって加速し続ければ同じ空間座標に静止していられる。

→ 2020 年ノーベル物理学賞「一般相対論に基づくブラックホール形成の確かな予言」.

- 「ブラックホール」という言葉は J. Wheeler が 1967 年に用いたのが最初とされている。
- 1970 年代初めには、ブラックホール候補の第 1 号 (はくちょう座 X-1) が X 線観測により見つかった。1 秒より短い時間スケールで X 線強度が変動するには、ブラックホールほどコンパクトな天体でないといけない。
- 1990 年代には、天の川銀河の中心領域 (いて座 A\*) を観測し、周りを旋回する星の軌道から中心天体の質量と大きさが見積もられた。その結果、天の川銀河中心には太陽の 400 万倍もの質量を持つ、ブラックホールらしきコンパクトな天体があることが分かった。

→ R. Genzel & A. Ghez, 2020 年ノーベル物理学賞「我々の銀河中心に存在する超巨大ブラックホールの発見」.

- 2015 年には、ブラックホール連星の合体によって放射された重力波が初観測された。合体した天体は両方とも 30 太陽質量ほどで、かつ、ブラックホールほどコンパクトであることが分かった。  
→ B. Barish, K. Thorne, & R. Weiss, 2017 年ノーベル物理学賞「LIGO 検出器および重力波の観測への決定的な貢献」.
- 2017 年には、世界中の電波望遠鏡をネットワークで結んで行われた観測により「ブラックホールの影」と呼ばれるブラックホールの直接撮像に成功した。

## 6.4 ブラックホールの時空構造

Schwarzschild 計量は事象の地平面  $r = r_g$  において  $g_{rr}$  が発散してしまう。しかし、これは座標の取り方に依存する、見かけの特異点である。つまり、上手く座標系を取れば回避できる特異点である。以下では、そのような座標系を 2 つ紹介する。

1 つは亀座標と呼ばれる座標系であり、Schwarzschild 時空の事象の地平面より外側を記述するのに適している。もう 1 つは Kruskal (クルスカール) 座標と言い、事象の地平面の内側 (ブラックホールの内部) も含めて Schwarzschild 時空の因果構造を記述できる。

### 1. 亀座標:

まず、 $g_{rr}$  が  $r = r_g$  で発散ないように座標変換

$$dr_* = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (6.19)$$

を行う。動径方向の座標は新たな座標と

$$r_* = r + r_g \ln \left[ \frac{r - r_g}{r_g} \right], \quad (6.20)$$

と結びついている。この座標では

$$\begin{cases} r = +\infty & \longrightarrow & r_* = +\infty \\ r = r_g & \longrightarrow & r_* = -\infty \end{cases}, \quad (6.21)$$

となり、 $r = r_g$  に到達することはないので、当然、発散は起きない。 $r_*$  の座標は  $r$  の座標に比べて  $r = r_g$  付近での“歩みが遅い”ので Schwarzschild 時空の亀座標と呼ばれる。逆に言うと、事象の地平面に近づくにつれて元の座標スケールをより大きく引き伸ばしているのと同じことである。亀座標は事象の地平面近傍（やや外側）での現象を記述するのに都合が良い。

## 2. Kruskal 座標:

座標変換  $(t, r) \rightarrow (u, v)$ :

$$\begin{cases} \left( \frac{r}{r_g} - 1 \right) \exp \left[ \frac{r}{r_g} \right] = u^2 - v^2 \\ \tanh \left( \frac{ct}{2r_g} \right) = \begin{cases} v/u & (r \geq r_g) \\ u/v & (r < r_g) \end{cases} \end{cases}, \quad (6.22)$$

を行うと、Schwarzschild 計量、(6.14) 式は

$$ds^2 = f^2 (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (6.23)$$

$$f^2 \equiv \frac{4r_g^3}{r} \exp \left[ -\frac{r}{r_g} \right], \quad (6.24)$$

と書ける。

- 光はヌル ( $ds^2 = 0$ ) なので、 $du = \pm dv$  である。つまり、 $(u, v)$  平面で光は斜め  $45^\circ$  に進む。
- $r = r_g$  においては 1 つ目の式より  $u^2 = v^2$  となり、解として  $u = \pm v$  の 2 通りが存在する。これは事象の地平面は原点を通り、斜め  $45^\circ$  の直線で表されることを示している。
- $t$  が一定: 2 つ目の式より

$$\begin{aligned} t = -\infty &\longrightarrow v = -u \\ t = 0 &\longrightarrow \begin{cases} v = 0 & (r \geq r_g, u \neq 0) \\ u = 0 & (r < r_g, v \neq 0) \end{cases} \\ t = \infty &\longrightarrow v = u \end{aligned}$$

それ以外の  $t$  では  $v \propto u$  (斜め  $45^\circ$  ではない直線)。

- $r$  が一定: 1 つ目の式より

$$\begin{aligned} r = 0 &\longrightarrow v^2 = u^2 + 1 \longrightarrow v = \begin{cases} \sqrt{u^2 + 1} & (v > 0) \\ -\sqrt{u^2 + 1} & (v < 0) \end{cases} \\ r = \infty &\longrightarrow u = \pm \infty \\ r = \text{const.} &\longrightarrow u^2 - v^2 = \alpha \longrightarrow v = \begin{cases} \sqrt{u^2 - \alpha} & (v > 0) \\ -\sqrt{u^2 - \alpha} & (v < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$r > r_g$  ( $r < r_g$ ) の時、 $\alpha$  の符号は正 (負) となるので注意。 $u$  が大きい時には  $v \approx \pm u$ 。  $v = 0$  では  $u = \pm\sqrt{\alpha}$  ( $r$  が大きいと  $\alpha$  も大きくなる)。

以上から、Schwarzschild 時空は 4 つの領域から成っていることが分かる (図 1)。領域 I と領域 II は

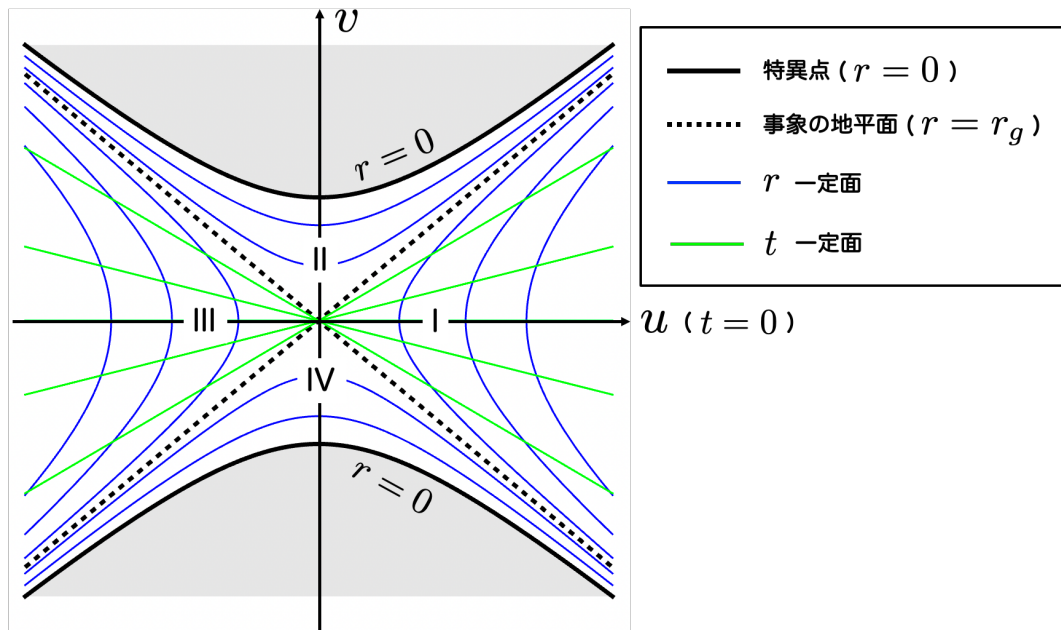


図 6.1 Schwarzschild 時空を Kruskal 拡張した領域。

Schwarzschild ブラックホールの外側と内側を表している。ブラックホールに自由落下していく光 (斜め  $45^\circ$  に伝播) や物体 (斜め  $45^\circ$  よりも上向きに運動) は必ず  $r = 0$  の特異点に到達する。領域 IV はブラックホールの逆で、 $r = 0$  の点から全て外に吐き出されるので、ホワイトホールを表す。しかし、現実の宇宙には存在しないと考えられている。領域 III は領域 I と  $r = r_g$  の一点 (球面) を通ってつながっていて、領域 I と同じ時空構造を持つ別世界である。このように  $r = r_g$  の一点を通してつながっている時空構造を Einstein-Rosen (アインシュタイン・ローゼン) 橋<sup>\*4</sup>と呼ぶ。

上で述べた時空構造は全て Schwarzschild 解に含まれていたものである。このように、ブラックホールの内外を含めて Schwarzschild 解の表す時空領域を最大限拡張することを Kruskal (クルスカール) 拡張と言う。

## 6.5 様々なブラックホール

4次元時空、漸近的平坦、真空解という条件でのブラックホール解は質量  $M$ 、電荷  $Q$ 、角運動量  $J$  のみで特徴付けられる。これをブラックホールの一意性定理 (無毛定理) と言う。

- $M$  のみ  $\rightarrow$  Schwarzschild ブラックホール
- $M$  と  $J$  を持つ ( $Q = 0$ )  $\rightarrow$  Kerr (カー) ブラックホール
- $M$  と  $Q$  を持つ ( $J = 0$ )  $\rightarrow$  Reissner-Nordström (ライスナー・ノルトシュトローム) ブラックホール
- $M, J, Q$  を持つ  $\rightarrow$  Kerr-Newmann (カー・ニューマン) ブラックホール

\*4 広い意味では、ワームホール時空。

Reissner-Nordström ブラックホールは静電場を生じさせ、Kerr-Newmann ブラックホールは回転する電荷により磁場も生じさせる。ただし、電荷を持つブラックホールは現実の宇宙には存在しないと思われるので、Reissner-Nordström ブラックホール、Kerr-Newmann ブラックホールは学術的な興味で研究されることが多い。Schwarzschild ブラックホールも回転（自転）が小さい極限として理想的な場合であり、現実の宇宙では大なり小なり回転している方が常である。つまり、宇宙に存在するブラックホールは Kerr ブラックホールである。

我々の宇宙ではジェットを噴出しているブラックホールも観測されているが、ブラックホールから直接何が噴出されている訳ではなく、Kerr ブラックホール周りに降着円盤があり、それが作る外部磁場と円盤からの降着物質がジェットを作ると考えている<sup>\*5</sup>。つまり、この場合もブラックホールの種類としては Kerr ブラックホールである。

参考文献:

- Misner, Thorne, Wheeler / Gravitation
- Chandrasekhar / The Mathematical Theory of Black Holes

## 6.6 Kerr ブラックホール

Kerr ブラックホール計量 (解)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \frac{2car_g r \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.25)$$

$$r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}, \quad a \equiv \frac{J}{cM}, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 - r_g r + a^2. \quad (6.26)$$

- 回転しているので、計量は  $t, \phi$  について非対角成分を持つ。時間反転に対して回転方向が逆転することを表している。このように、時間に陽に依存しなくても時間反転に対して対称ではない場合、定常的 (stationary) という。
- $J = 0$  の極限では、Schwarzschild ブラックホールに帰着する。
- $r = 0, \theta = \pi/2$  (赤道面上) の時、 $\Sigma = 0$  となり、Schwarzschild ブラックホール同様に、計量は発散する<sup>\*6</sup>。このことから推測されるように、 $r = 0$  は真の特異点である。

- 事象の地平面:

<sup>\*5</sup> ジェットの放射機構としては Blandford-Znajek (ブランフォード・ツナジエク) 機構が有名である。

<sup>\*6</sup> 計量が発散するだけでは見かけの特異点の可能性もあるので、厳密には、曲率が発散することを示す必要がある。

$g_{rr} = \infty$  となる時なので、 $\Delta = 0$  を  $r$  について解けば求まる。

$$r_+ = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2}, \quad (6.27)$$

$$r_- = \frac{r_g}{2} - \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2}. \quad (6.28)$$

Kerr ブラックホールには事象の地平面が 2 つ存在する。これらの地平面は  $a > r_g/2$  では虚数解になってしまい消失する。すなわち、ある閾値よりも早く自転していると、事象の地平面が存在せず、ブラックホールではなくなってしまう。また、 $r = 0$  の特異点が直接観測できることになってしまい、一般相対性理論は破綻してしまう。このような特異点は裸の特異点と呼ばれ、理論的には存在してはいけないものと考えられている。

裸の特異点を現実の宇宙から隠すために、Penrose (ペンローズ) により提唱されたのが宇宙検閲官仮説、「宇宙で実際に作られる特異点は必ず事象の地平面によって隠される」というものである。実際、 $a > r_g/2$  という角運動量は

$$\frac{J}{cM} > \frac{r_g}{2} \quad \rightarrow \quad J > \frac{r_g}{2} Mc, \quad (6.29)$$

という極限的な大きさになっており、物理的に実現困難であることを根拠にしている。ただ、これは単なる仮説であり、そうなるべき証明は無い。

#### ● 時空の引きずり

$r$  一定、 $\theta$  一定、 $\Omega = d\phi/dt$  で事象の地平面の外側を運動している粒子を考える。この粒子の固有時間を  $\tau$  とし、 $d\phi = \Omega dt$  と書けることを用いると

$$d\tau^2 = -ds^2 = -g_{tt}(\Omega)dt^2 - 2g_{t\phi}(\Omega)dtd\phi - g_{\phi\phi}(\Omega)d\phi^2 = dt^2 f(\Omega), \quad (6.30)$$

$$f(\Omega) \equiv \left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right) c^2 + \frac{2car_g r \sin^2 \theta}{\Sigma} \Omega - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta \Omega^2, \quad (6.31)$$

となり、粒子の運動として許される解は  $f(\Omega) > 0$  である。 $f(\Omega)$  は  $\Omega$  について上に凸の二次関数なので、許される  $\Omega$  の範囲は  $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$  である。 $\Omega_-$ 、 $\Omega_+$  はブラックホールの角運動量パラメータ  $a$  や粒子の軌道パラメータ  $r$ 、 $\theta$  で決まる。

Newton 力学では、重力と遠心力の釣り合い  $GM/r^2 = r\Omega^2$  より分かるように  $\Omega$  は正負の解を取り得るので、 $\Omega = 0$  も解として許される<sup>\*7</sup>。しかし、一般相対論では  $a$  がある程度大きくなると  $\Omega_-$  は正となってしまう。負の  $\Omega_-$  が解として許されなくなる境界の半径は  $f(\Omega = 0) = 0$  を  $r$  について解けばよい。 $1 - r_g r/\Sigma = 0$  より

$$r_0 = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (6.32)$$

この半径は  $\theta$  の関数なので扁平回転体 ( $\theta = \pi/2$ , つまり、赤道で半径が最も大きくなる) を表している。つまり、 $r < r_0$  では  $\Omega_- > 0$  となり  $\Omega = 0$  は解ではなくなるので、実在する粒子は必ずブラックホールの回転方向に運動してしまう。これは、ブラックホールが回転しているために周りの時空も引き

\*7 ジェットを噴射するなどして加速し続けていれば同じ  $\phi$  に静止していることができる。

ずられて回転するからである。

$a$  が小さい極限 ( $a \rightarrow 0$ ) では  $r_0$  は事象の地平面  $r_{\pm}$  と一致するが、有限の  $a$  では  $\theta = 0, \pi$  (自転軸上) を除いて  $r_+ < r_0$  となり、静止することができない領域 (エルゴ領域) が存在する (図 6.2 参照)。 $r > r_0$  では  $\Omega = 0$  の解も許されるが、それでも時空の引きずりは存在する。時空の引きずり効果は、Kerr ブラックホールのような極限的な場合を除いて一般に微小であるが、地球周りの衛星による実験で時空の引きずり効果は確認されている [Gravity Probe B: C. W. F. Everitt et al., Physical Review Letters 106, 221101 (2011)]。

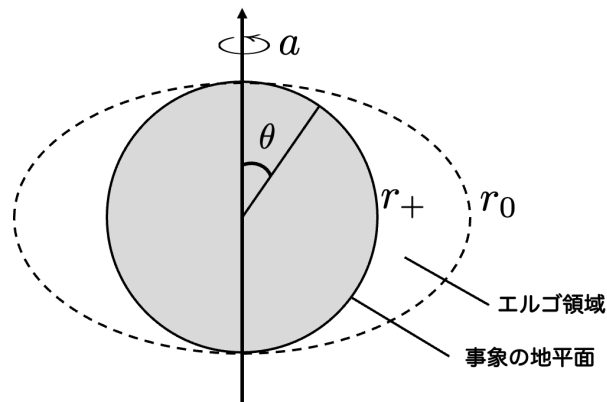


図 6.2 Kerr ブラックホールの事象の地平面とエルゴ領域.

## 6.7 演習問題

[問 1] 静的、球対称、真空中、を仮定して Einstein 方程式から Schwarzschild 計量を導け (接続係数、Ricci テンソル、Ricci スカラーなどを自分で計算せよ)。

## 第7章

# 球対称時空での粒子の運動

Birkhoff の定理

球対称、真空解は Schwarzschild 解が唯一の解である。

Birkhoff (バーコフ) の定理は、Schwarzschild 計量が球対称なブラックホールだけでなく、球対称な星の外側も同様に記述できることを保証する。つまり、考えている球殻の内部にある総質量  $M$  (分布は球対称) だけが時空の性質を決める。

### 7.1 球対称時空での粒子の運動

粒子の運動を考えるので、時間座標として粒子の固有時間  $\tau$  ( $ds^2 = -d\tau^2$ ) をとることができる。ラグランジアンは以前、測地線方程式の導出の時に定義したように、以下のものを採用する。

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} . \quad (7.1)$$

粒子の運動方程式は Euler-Lagrange 方程式 (ドットは  $\tau$  微分)

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 , \quad (7.2)$$

から求まる<sup>\*1</sup>。4元運動量

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu , \quad (7.3)$$

を用いて書き直すと

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} , \quad (7.4)$$

となる。ラグランジアン  $L$  は今考えている静的球対称時空では  $x^0, x^3 = \phi$  には依らない (計量を通して  $x^1 = r, x^2 = \theta$  には依存する) ので  $p_0, p_\phi$  は定数であることが分かる。そこで、以下のように定数  $E, L_z$  を

<sup>\*1</sup> 以前に測地線方程式を導出した時と比べて、ラグランジアンには  $m/2$  が余分に掛かっている。 $m$  は静止質量であり、定数は運動方程式に影響を与えないため、導かれる運動方程式は測地線方程式そのものである。

定義する。

$$E \equiv -p_0 c = -m c g_{00} \dot{x}^0 = m c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}, \quad (7.5)$$

$$L_z \equiv p_\phi = m g_{\phi\phi} \dot{\phi} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (7.6)$$

ここでは、4元運動量の具体形、(7.3)式を用いた。 $E$ と $L_z$ の次元からも分かるように、これらは実際に粒子のエネルギーと角運動量を表している。

(7.3)式より $p_\theta$ は $\dot{\theta}$ に比例するが、球対称時空では $\theta = \pi/2$ としても一般性を失わず $\dot{\theta} = 0$ であるので、 $p_\theta = 0$ となり、Euler-Lagrange方程式の $\mu = 2$ の場合は自明である。

残るは $\mu = 1$ の場合( $r$ 方向の運動方程式)であるが、ここではそれと等価な式としてエネルギー保存則

$$p^\mu p_\mu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2 c^2 \quad (7.7)$$

を用いる\*2。(7.5)、(7.6)式より $p_0, p_\phi$ を $E, L_z$ で表し、 $p_r$ は $g_{rr}$ と $\dot{r}$ を用いて書けるので

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} + V(r) = \epsilon^2, \quad \epsilon \equiv \frac{E}{m c^2}, \quad \ell \equiv \frac{L_z}{m c r_g}, \quad (7.8)$$

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \ell^2 \frac{r_g^2}{r^2}\right), \quad (7.9)$$

を得る。これはポテンシャル $V(r)$ 中でエネルギー $\epsilon^2$ を持つ粒子の運動と解釈することができる\*3。図7.1に異なる $\ell$ (角運動量の大きさ)に対するポテンシャルの形を示す。 $V(r)$ は無遠において $V_\infty = 1$ となる。

### 円軌道

一定の軌道半径になる解( $\dot{r} = 0$ )はポテンシャルが平坦になる半径、つまり、 $dV/dr = 0$ を満たす $r$ として与えられる。したがって、解は

$$r_\pm = r_g \ell^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{\ell^2}}\right), \quad (7.10)$$

で与えられる。角運動量の大きさにより解は次の3通りに分類される。

(i)  $\ell > \sqrt{3}$ の場合: (7.8)式より $\epsilon_\pm \equiv \sqrt{V(r_\pm)}$ とすると $\epsilon_- > \epsilon_+$ となる。 $\epsilon_+$ の解は安定で、 $\epsilon_-$ の解は不安定である。

(ii)  $\ell = \sqrt{3}$ の場合:  $r_+ = r_- = \ell^2 r_g = 3r_g$ .

(iii)  $\ell < \sqrt{3}$ の場合:  $r_\pm$ は複素数となり、解なし。

以上から、Schwarzschild時空において許される粒子の円軌道は次のようにまとめられる。

\*2 特殊相対論では $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ なので $p^\mu p_\mu = -p_0^2 + \vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2 c^2$ , つまり、 $E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2$ である。

\*3 これは解釈であって、物理的なエネルギーとポテンシャルとは異なるので注意すること。実際、粒子の物理的エネルギーは $\epsilon^2$ ではなく、 $\epsilon$ である。

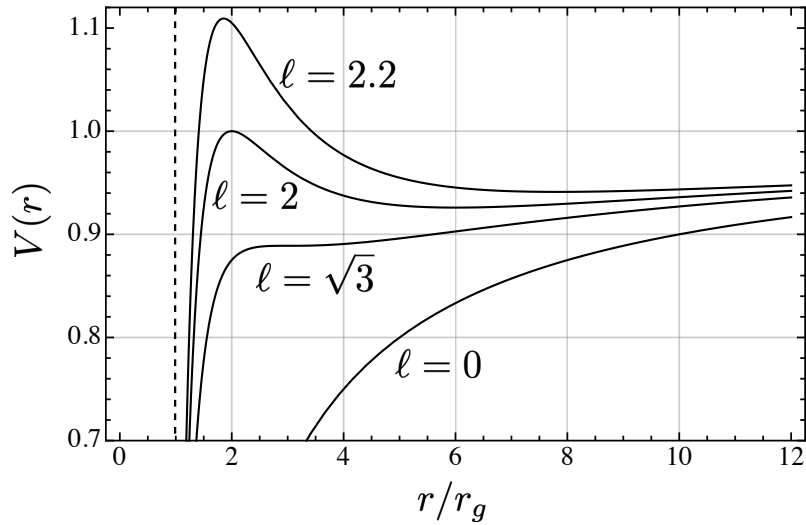


図 7.1 ポテンシャルの形。垂直の点線は事象の地平面を表す。

- 円軌道が存在するのは  $l \geq \sqrt{3}$  の場合である。安定な軌道と不安定な軌道が存在する。
- $l = \sqrt{3}$  の時、円軌道半径は最も事象の地平面に近づく。この時は不安定軌道が 1 つ存在するだけである。
- $l < \sqrt{3}$  では、円軌道の解は存在しない。つまり、中心にあるブラックホールにただ落ちていくだけである。これは Newton 力学との大きな違いである。

### その他 ( $\dot{r} \neq 0$ ) の軌道

- 落下軌道: (i) で  $\epsilon^2 > V(r_-)$  の場合、または、(ii), (iii) の場合。
- 散乱軌道: (i) で  $1 < \epsilon^2 < V(r_-)$  の場合。
- 束縛 (楕円) 軌道: (i) で  $V(r_+) < \epsilon^2 < 1$  の場合。

## 7.2 水星の近日点移動

一般相対論が提唱される以前、水星の公転軌道の観測データから近日点が徐々に ( $\Delta\phi \approx 43 \text{ arcsec/century}$ ) ずれていく (より角度が進む) ことが知られていた。Newton 力学では摩擦などが無ければ軌道は閉じるため、近日点移動の観測を説明できなかった。

一般相対論では Newton 力学に対して相対論的補正が存在するので、近日点移動は相対論的補正として上手く説明される。以下では、前節で導いた運動方程式により近日点移動を導く。

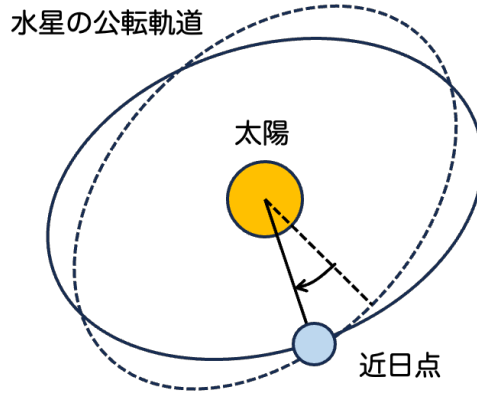


図 7.2 水星の公転軌道と近日点移動.

前節と同様に  $\theta = \pi/2$  の場合を考え、(7.8) 式のエネルギー保存則において変数を

$$\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{dr}{d\phi}, \quad u \equiv \frac{r_g}{r}, \quad (7.11)$$

と変換すると\*4、

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\epsilon^2 - 1}{\ell^2} + \frac{u}{\ell^2} - u^2 + u^3 \equiv F(u), \quad (7.12)$$

となる。

Newton 力学における Kepler 運動は  $\phi_0$  を近日点における回転角、 $e$  を公転軌道の離心率として

$$u = \frac{1}{2\ell^2} \{1 + e \cos(\phi - \phi_0)\}, \quad \epsilon^2 - 1 = 4\ell^2(\epsilon^2 - 1), \quad (7.13)$$

で与えられ、 $u^3$  が相対論的補正であることが分かる。 $u \ll 1$  であるので相対論的補正は微小な効果である。

以下では、具体的に  $\phi(u)$  を求め、軌道が 1 周した時に  $\phi_0 \rightarrow \phi_0 + 2\pi + \Delta\phi$  となることから近日点移動  $\Delta\phi$  を求める。まず、(7.12) 式の右辺、 $F(u)$  は  $u$  についての 3 次式であり、 $F(u) = 0$  は少なくとも近日点  $u_p$  と遠日点  $u_a$  を解に持つ。物理的に許される範囲 ( $u_a < u < u_p$ ) では (7.12) 式の左辺が正、つまり、 $F(u) > 0$  でなければならないので、 $u_p < u$  にもう一つ別の解、 $u_0$  が存在する。したがって、物理的な範囲は  $u_a < u < u_p$  であるが、(7.12) 式の右辺は

$$F(u) = (u - u_a)(u_p - u)(u_0 - u), \quad (7.14)$$

と書くことができる。(7.12) 式を近日点から一周分だけ積分すると

$$\phi - \phi_0 = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)(u_0 - u)}}. \quad (7.15)$$

変数変換  $x \equiv (u - u_a)/(u_p - u_a)$  を行うと (7.15) 式は

$$\phi - \phi_0 = \frac{2}{\sqrt{u_0 - u_a}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \frac{4K(k)}{\sqrt{u_0 - u_a}}, \quad (7.16)$$

\*4 楕円軌道に対しては  $\dot{r} \neq 0$  であり、 $r$  と  $\phi$  を対応させることができる。

と書ける。ここで、 $k^2 \equiv (u_p - u_a)/(u_0 - u_a)$  であり、 $K(k)$  は第 1 種の完全楕円積分である。 $k \ll 1$  では  $K(k)$  は

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{k^2}{4} + \mathcal{O}(k^4) \right], \quad (7.17)$$

と展開できるので、

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &\approx \frac{2\pi}{\sqrt{u_0 - u_a}} \left[ 1 + \frac{u_p - u_a}{4(u_0 - u_a)} \right] \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - u_p - 2u_a}} \left[ 1 + \frac{u_p - u_a}{4(1 - u_p - 2u_a)} \right] \\ &\approx 2\pi + \frac{3\pi(u_p + u_a)}{2}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

ここで、2 行目では 3 次方程式の解の和の公式<sup>\*5</sup>、 $u_p + u_a + u_0 = 1$  を用いた。また、3 行目では  $u_a < u_p \ll 1$  であることを用いた。したがって、楕円軌道の長軸半径、短軸半径は  $r_a = 2\ell^2 r_g / (1 - e^2)$ 、 $r_p = 2\ell^2 r_g / (1 + e)$  で与えられるので、ほぼ円軌道 ( $e \ll 1$ ) だとすると  $r_a \approx r_p$  であり、平均半径を  $\bar{r}$  とすると

$$\Delta\phi \approx \frac{3\pi r_g}{\bar{r}} = \frac{6\pi GM}{\bar{r}c^2}, \quad (7.19)$$

となる。ここで、 $M$  は太陽質量である。重力場を作る質量  $M$  が大きいほど、また、軌道半径  $\bar{r}$  が小さいほど、重力が強くなるので近日点移動の効果は大きくなる。

(7.18) 式で軌道離心率も考慮して正確な数値を代入すると、一般相対論の理論予言は  $\Delta\phi = 42.980$  arcsec/century となる。水星の近日点移動は、最近の観測では  $\Delta\phi = 42.980 \pm 0.001$  arcsec/century が測定値である。理論予言と比較すると、 $\mathcal{O}(10^{-5})$  の精度で観測と一致している [C. M. Will / Theory and Experiment in Gravitational Physics, 2nd ed., Cambridge University Press].

### 7.3 光の屈折 (重力レンズ効果)

1919 年、Eddington らが日食観測を行い、太陽をかすめる星の光が曲がることを確認した。これは一般相対性理論が正しいことを裏付ける決定的な観測的証拠となった。

その効果を導出するには前節のエネルギー保存則を光に対して考えればよいが、 $m \rightarrow 0$  の時に  $\epsilon$  と  $\ell$  は発散してしまう。そこで、

$$\alpha^{-2} \equiv \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2 - 1}{\ell^2} = \left( \frac{Er_g}{L_z c} \right)^2 \quad (7.20)$$

であることを用いて、

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = \alpha^{-2} - u^2 + u^3, \quad (7.21)$$

となる。各項のオーダーを評価しよう。

$$L_z \approx r_0 p_x \approx r_0 \frac{E}{c} \quad \rightarrow \quad \alpha^{-2} \approx \left( \frac{r_g}{r_0} \right)^2 \lesssim \left( \frac{r_g}{r_\odot} \right)^2 \sim 10^{-11}, \quad u \sim \frac{r_g}{r_0} \sim 10^{-6}. \quad (7.22)$$

<sup>\*5</sup> Vieta の公式と呼ばれる。一般に、3 次方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  に対する解を  $x_1, x_2, x_3$  とすると  $x_1 + x_2 + x_3 = -b/a$  が成り立つ。

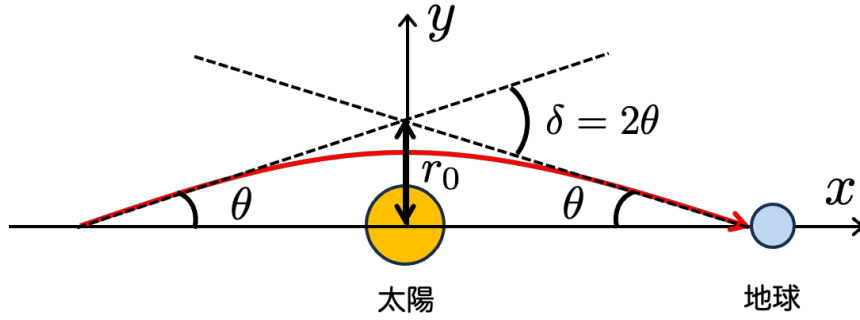


図 7.3 光の屈折 (重力レンズ効果). 赤線は光線の軌道を示す。

したがって、 $u^3$  の項が微小な相対論的補正であり、それを無視すれば (7.21) 式は Newton 力学の式と一致し、光は“直線”に沿って進む。つまり、 $u = \alpha^{-1} \cos \phi$  が解となる\*6。  $u^3$  の項は Newton 力学での解への摂動として扱えるので、解を

$$u \approx \alpha^{-1} \cos \phi + \alpha^{-2} f(\phi), \quad (7.23)$$

と仮定して\*7、(7.21) 式に代入すると  $f(\phi)$  に対する  $\alpha^{-1}$  の高次補正を無視した近次解\*8として

$$u \approx \alpha^{-1} \cos \phi + \frac{\alpha^{-2}}{2} (1 + \sin^2 \phi), \quad (7.24)$$

を得る。極座標  $(r, \phi)$  から直交座標  $(x, y)$  へ、 $x = r \sin \phi$ ,  $y = r \cos \phi$  と座標変換 (図 7.3 参照) を行うと (7.24) 式から

$$y = \alpha r_g - \frac{1}{2\alpha} \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (7.25)$$

という関係式が得られる。地球から見て太陽よりも十分遠いところ ( $x \ll 0$ ) と太陽から地球側へ十分離れたところ ( $x \gg 0$ ) を考えると

$$y = \begin{cases} \alpha r_g + \frac{x}{\alpha} & (x \ll -r_0) \\ \alpha r_g - \frac{x}{\alpha} & (x \gg r_0) \end{cases} \quad (7.26)$$

となる。光の曲がり角は光線の傾きより

$$\delta = 2\theta = 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{2}{\alpha} \approx \frac{2r_g}{r_0} = \frac{4GM}{c^2 r_0}, \quad (7.27)$$

である。前節と同様に、重力場を作る質量  $M$  が大きいほど、また、最近接軌道半径  $r_0$  が小さいほど、重力が強くなるので光の曲がり角は大きくなる。 $M = M_\odot$ ,  $r_0 = r_\odot$  とすると  $\delta \approx 1.75''$  (秒角) となる。最近の観測では  $\mathcal{O}(10^{-4})$  の精度で観測と一致している [C. M. Will / Theory and Experiment in Gravitational Physics, 2nd ed., Cambridge University Press].

\*6 太陽を原点として極座標 ( $r_0$  の方向が  $\phi = 0$ ) をとると  $r_0 = r \cos \phi$  なので、 $r, r_0$  をそれぞれ  $u, \alpha$  に書き換えればよい。

\*7 上で行ったオーダー評価の結果から摂動は  $\alpha^{-2}$  のオーダーになることが分かる。ちなみに、この場合は近日点移動の場合と違って完全楕円積分の形で解くことはできない。その理由は  $u_a < 0$  となり遠日点が存在しないので、積分範囲が公式に合致しないからである。

\*8  $\alpha^{-1}$  の最高次についてのみ方程式を満たす。 $f(\phi) = a \cos^m \phi + b \sin^n \phi + c$  すれば、係数は一意に決まる。

ここでは、太陽の重力場による光の屈折を考えたが、同じことは遠方の宇宙でも起きている。銀河の重力場によって背景にある銀河や星の光が曲げられて我々に届くのである。屈折角が大きく、光が複数の光路に沿って到達する場合には背景銀河の像が複数観測される。このような現象は強い重力レンズと呼ばれている。屈折角がそれほど大きくなければ、複数の像に分かれることはなく背景銀河の像が歪むだけである。このような場合は弱い重力レンズと呼ばれている。重力レンズ効果を観測すれば、銀河の重力場が分かるので、ダークマター（電磁波で光らない、未知の物質）の分布を知ることができる。

## 7.4 演習問題

[問 1] 球対称時空での粒子の運動方程式を自ら導出し、軌道の分類について考察せよ。

[問 2] 球対称時空での粒子の運動、水星の近日点移動、光の屈折（重力レンズ効果）、それぞれについて Newton 力学と定性的に異なる点（一般相対論特有の物理的性質）は何か。

[問 3](発展) 近日点移動と光の屈折の場合の方程式を解き、それぞれの解を求めよ（計算を追ってみよ）。

## 第 8 章

# 宇宙論

### 8.1 宇宙原理

我々の地球は太陽系の中にあり、太陽系は天の川銀河に存在する。天の川銀河に最も近い (矮小銀河などは除く) 銀河はアンドロメダ銀河であり、その距離はおよそ 250 万光年 ( $\sim 1 \text{ Mpc}^{*1}$ ) である。他にも沢山の銀河が存在し、天の川銀河やアンドロメダ銀河は宇宙に存在する典型的なサイズの銀河である。宇宙全体で見れば、銀河間の平均距離は  $2 - 3 \text{ Mpc}$  であることが天文観測から知られており、さらに広い視点、 $\sim 100 \text{ Mpc}$  の距離スケールで宇宙を見れば、銀河分布は空を見る方向や場所に依らない<sup>\*2</sup>。我々が観測できる現在の宇宙の大きさは  $4000 \text{ Mpc}$  以上であるので、宇宙全体ではほぼ一様等方と考えて良さそうである。そこで、宇宙論における宇宙モデルとして一様等方宇宙モデルを採用する。これは宇宙には特別な場所や方向が無いことを意味し、地球は特別な存在ではないという地動説を提唱したコペルニクスにちなんで、コペルニクスの原理と呼ばれている。

一様等方な宇宙においては空間計量の形は以下のように絞られる。

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (8.1)$$

ここで、 $K$  は曲率を表しており、 $K > 0$  (正曲率),  $K = 0$  (平坦),  $K < 0$  (負曲率) である。新たな座標

$$dx = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (8.2)$$

---

\*1  $1 \text{ pc} \approx 3.26 \text{ 光年}$ ,  $1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$ .  $\text{pc}$  はパーセク、 $\text{Mpc}$  はメガパーセクと読む。

\*2 例えば、<http://sdss.physics.nyu.edu/pie/> を参照のこと。

を用いて書き直す\*3

$$d\ell^2 = dx^2 + S_K^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad S_K(x) \equiv \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{K}x)}{\sqrt{K}} & (K > 0) \\ x & (K = 0) \\ \frac{\sinh(\sqrt{-K}x)}{\sqrt{-K}} & (K < 0) \end{cases} . \quad (8.6)$$

となる\*4。曲率の違いにより球の表面積  $A$  はそれぞれ

$$A = 4\pi S_K^2(x), \quad (8.8)$$

となる。正曲率の場合には  $x$  が大きくなるにつれ、表面積は大きくなっていくが、 $\sqrt{K}x = \pi/2$  で最大となり、 $\sqrt{K}x = \pi$  で再びゼロになる。負曲率の場合には  $x$  が大きくなるにつれ、表面積は指数関数的に大きくなっていくので、平坦な場合のべき的増加よりもずっと速く表面積が増えていく。

## 8.2 FLRW 計量と宇宙膨張

3次元等曲率空間に時間を加えた計量を FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, フリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー) 計量と呼ぶ。

\*3 この新たな座標  $x$  は定曲率空間で定義された距離である。曲率  $K = R_c^{-2}$  の球面の場合には、平坦空間の距離  $r$  と球面に沿って定義した距離  $x$  の関係は以下ようになる。

$$r = R_c \sin \theta = R_c \sin \frac{x}{R_c}, \quad (8.3)$$

となる。ここで、 $\theta$  は円弧  $x$  に対する球の中心から測った角度である。上式の両辺の微分をとると

$$dx = \frac{dr}{\cos(x/R_c)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - (r/R_c)^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} . \quad (8.4)$$

これを負曲率  $K < 0$  の場合にも一般化し、両辺を積分して積分公式

$$\sin^{-1} \sqrt{K}r = \frac{1}{\sqrt{K}} \int_0^{\sqrt{K}r} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \sinh^{-1} \sqrt{-K}r = \frac{1}{\sqrt{-K}} \int_0^{\sqrt{-K}r} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} . \quad (8.5)$$

を用いると  $r = S_K(x)$  を得る。

\*4  $r \rightarrow r/\sqrt{|K|}$  として無次元量の  $r$  に変数を取り直し、無次元量  $d\chi = dr/\sqrt{1 - kr^2}$  ( $k = +1$ : 正曲率、 $k = 0$ : 平坦、 $k = -1$ : 負曲率)、もしくは  $d\chi = \sqrt{K}dx$  を用いて書き直す流派もある (佐藤勝彦 / 相対性理論、佐々木節 / 一般相対論、など)。その場合は空間的距離が

$$d\ell^2 = R^2 [d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad S(\chi) \equiv \begin{cases} \sin \chi & (k = +1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh \chi & (k = -1) \end{cases} . \quad (8.7)$$

となり、曲率が規格化され無次元量になる一方、スケール因子に対応する  $R = a/\sqrt{|K|}$  ( $k = \pm 1$ ),  $R = a$  ( $k = 0$ ) が距離の次元を持つことになる ( $R$  は  $a$  と書かれていたりするので要注意)。これらは何を規格化するかだけの違いであり、当然、観測量や運動方程式に違いは無い。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dx^2 + S_K^2(x)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (8.9)$$

今の場合、一様等方性を満たしていれば空間計量の時間的な変化も許されるので、時間に依存する関数  $a(t)$  が導入されている。この  $a(t)$  は空間座標の大きさを与えるものになっており、スケール因子と呼ばれる。宇宙モデルの文脈では、スケール因子は宇宙膨張そのものを表すことになる。

宇宙が膨張していると伝播する光の波長も引き伸ばされることになる。これを示すために、時刻  $t_1$  において点  $(x_1, \theta_1, \phi_1)$  で発せられた光が時刻  $t_0$  に座標原点にいる観測者に届くとする。今、等方な宇宙を考えているので  $(\theta_1, \phi_1) = (0, 0)$  と固定しても一般性は失わない。光 (ヌル) は  $ds^2 = 0$  であるので、

$$c dt = -a(t) dx , \quad (8.10)$$

となる (原点に向かって伝播するのでマイナス符号が付いている)。光線に沿って積分すると

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = - \int_{x_1}^0 dx = x_1 . \quad (8.11)$$

光の周期  $T_1$  だけずれて出発した光は観測者に 1 周期  $T_0$  だけ遅れて到達することになる。伝播する距離は同じなので、(8.11) 式より

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{c dt}{a(t)} . \quad (8.12)$$

右辺の積分区間を分け、各項を Taylor 展開すると\*5

$$\begin{aligned} \int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{c dt}{a(t)} &= - \int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{c dt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{c dt}{a(t)} \\ &= \int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} - \frac{c T_1}{a(t_1)} + \frac{c T_0}{a(t_0)} . \end{aligned} \quad (8.14)$$

波長は  $\lambda_1 = c T_1$ ,  $\lambda_0 = c T_0$  なので、(8.12) 式と (8.14) 式より

$$\frac{\lambda_1}{a(t_1)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)} . \quad (8.15)$$

ここで、波長の伸び具合を

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} , \quad (8.16)$$

と定義する。

\*5  $f(t)$  の積分形を  $F(t)$  とすると、

$$\begin{aligned} F(t + \delta t) - F(t) &= F'(t) \delta t + \mathcal{O}[(\delta t)^2] \\ &= f(t) \delta t + \mathcal{O}[(\delta t)^2] \end{aligned} \quad (8.13)$$

### 赤方偏移

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (8.17)$$

$\nu_1, \nu_0$  は発せられた光の周波数と現在観測された光の周波数である。赤方偏移  $z$  は宇宙膨張によりスケール因子が  $a(t_1)$  から  $a(t_0)$  に増加した時、波長も同様に  $\lambda_1$  から  $\lambda_0$  へ引き伸ばされる、その割合を表している。定義から  $z$  は正またはゼロの値をとる。 $z$  が大きい場合、光はスケール因子がより小さな宇宙、つまり、より過去の宇宙で発せられたことになるので、 $z$  は宇宙の時間を表す（過去ほど大きく、現在でゼロになる）のに用いられる。スケール因子はこのノートの定義では無次元量であるので、現在を基準にして  $a(t_0) = 1$  と書かれる場合が多い。

スケール因子は宇宙膨張の効果を表すので、空間の 3 点  $r_1, r_2, r_3$  間の距離を  $r_{12}, r_{13}, r_{23}$  とすると、ある時刻  $t_0$  での距離は将来の時刻  $t$  において

$$r_{12}(t) = a(t)r_{12}(t_0), \quad r_{13}(t) = a(t)r_{13}(t_0), \quad r_{23}(t) = a(t)r_{23}(t_0), \quad (8.18)$$

となる。これらの時間微分をとるとその膨張速度は

$$v_{12}(t) = \dot{a}(t)r_{12}(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r_{12}(t) \equiv H(t)r_{12}(t) \quad (8.19)$$

と書ける。 $r_{13}, r_{23}$  に対しても同様である。したがって、宇宙膨張率を表すパラメータとして Hubble (ハッブル) パラメータ<sup>\*6</sup>を定義できる。

### Hubble パラメータ

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}. \quad (8.20)$$

Hubble パラメータの測定を行い、宇宙が膨張していることを最初に観測で確認したのが Hubble である。彼は、1929 年、銀河までの距離と光スペクトルの赤方偏移（近傍宇宙では、Doppler 効果との類推で銀河の後退速度と解釈できる）に比例関係

$$v = H_0 d, \quad (8.21)$$

が成り立つことを発見した。ここで、 $d, v$  は銀河までの距離と銀河の後退速度である。 $H_0$  は現在時刻での Hubble パラメータ（定数）である。当時の観測では、測定の系統誤差も大きく 500 km/s/Mpc という値が得られたが、現在では  $70 \pm 5$  km/s/Mpc 程度まで絞り込まれている。

<sup>\*6</sup> 最近は、Hubble-Lemaître (ハッブル・ルメートル) パラメータと呼ぶことが国際天文学連合 (IAU) により推奨されている。理由は、Hubble とほぼ同時期に Lemaître も宇宙膨張速度に関する論文を発表していたことが明らかになったからである。

### 8.3 Friedmann 方程式

FLRW 計量が与えられると、時空と物質の時間発展を記述する運動方程式は Einstein 方程式から得られる\*7。まず、FLRW 計量を

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (8.22)$$

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j \equiv dx^2 + S_K^2(x) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (8.23)$$

と書くと、計量は

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1, & g_{0i} &= g_{i0} = 0, & g_{ij} &= a^2 \gamma_{ij}, \\ g^{00} &= -1, & g^{0i} &= g^{i0} = 0, & g^{ij} &= \frac{1}{a^2} \gamma^{ij}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

である。ここで、 $\gamma^{ij}$  は  $\gamma_{ij}$  の逆行列である。これらから接続係数は以下のように計算される。

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a\dot{a}}{c} \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{ca} \delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \gamma^{i\ell} (\gamma_{\ell k,j} + \gamma_{j\ell,k} - \gamma_{jk,\ell}). \quad (8.25)$$

これら以外の成分は全てゼロになる。ここで、ドットは時間  $t$  での微分を表す。接続係数が求まると、Riemann テンソルは\*8

$$\begin{aligned} R^0{}_{00i} &= R^0{}_{0ij} = R^0{}_{ijk} = R^i{}_{0jk} = R^i{}_{j0k} = 0, \\ R^0{}_{i0j} &= \frac{a\ddot{a}}{c^2} \gamma_{ij}, \quad R^i{}_{00j} = \frac{\ddot{a}}{c^2 a} \delta_j^i, \quad R^i{}_{jkl} = \left( \frac{\dot{a}^2}{c^2} + K \right) (\delta_k^i \gamma_{j\ell} - \delta_\ell^i \gamma_{jk}), \end{aligned} \quad (8.26)$$

Ricci テンソルは

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0i} = R_{i0} = 0, \quad R_{ij} = \frac{a^2}{c^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2c^2}{a^2} K \right] \gamma_{ij}, \quad (8.27)$$

と求まる。これら以外の成分はゼロになる。これらから Ricci スカラーは

$$R = \frac{6}{c^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2}{a^2} K \right], \quad (8.28)$$

となる。したがって、Einstein テンソル

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (8.29)$$

は

$$G_{00} = \frac{3}{c^2} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2}{a^2} K \right], \quad G_{0i} = G_{i0} = 0, \quad G_{ij} = -\frac{a^2}{c^2} \left[ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2}{a^2} K \right] \gamma_{ij}, \quad (8.30)$$

\*7 Schwarzschild 解を求めた時と異なり、今の場合、計量が時間に依存する未知関数を含んでいるので、Einstein 方程式はそれらの時間依存性を決定する。

\*8 Riemann テンソルの空間成分、 $R^i{}_{jkl}$  を求める時には  $R^i{}_{jkl}$  は  $\delta_{ij}$  および  $\gamma_{ij}$  から構成されなければならない。しかも、Riemann テンソルの対称性を満たすためには  $R^i{}_{jkl} \propto \delta_k^i \gamma_{j\ell} - \delta_\ell^i \gamma_{jk}$  であることを用いるとよい。

となる。一方、Einstein 方程式の右辺、 $(8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}$  としては完全流体の場合を考える。一様等方宇宙では完全流体は特別な方向に運動してはいけなないので、静止系で考えると

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p) . \quad (8.31)$$

という形になる。ここで、 $\rho$  はエネルギー密度<sup>\*9</sup>、 $p$  は圧力である。Einstein 方程式の 00 成分、 $ii$  成分 ( $ij$  成分のトレース) より次の 2 式を得る<sup>\*10</sup>。

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2}K = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) \end{cases} . \quad (8.32)$$

(8.32) 式は、宇宙に存在する流体のエネルギー密度や圧力がスケール因子の時間発展を決める式になっている。1 つ目の式は、時空と物質のエネルギー保存則に対応しており、Friedmann 方程式と呼ばれている。2 つ目の式は、宇宙膨張の運動方程式に対応し、加速度方程式と呼ばれている。

## 8.4 Friedmann 方程式の解

宇宙論では、バリオン<sup>\*11</sup>やダークマターは非相対論的<sup>\*12</sup>であり  $p = 0$  と扱えるので、物質と呼ぶ。ダークマターは電磁相互作用をしない、もしくは、相互作用したとしても非常に弱くて電磁波の観測によって直接検出されない物質のことをそう呼んでいる。電磁相互作用をしないということは当然光を発しないので、宇宙に存在していても多くの場合は重力によってのみ、その存在を感知できることになる。光やニュートリノは相対論的であり  $p = \rho/3$  なので<sup>\*13</sup>、輻射と呼ぶ。

以下では、物質優勢の宇宙、輻射優勢の宇宙について考える。宇宙の曲率は最近の観測からほぼ平坦に近いことが分かっているので、 $K = 0$  (曲率半径  $\infty$ ) と仮定する。

### 1. 物質優勢の宇宙

宇宙膨張により粒子数密度は希釈されるので、物質のエネルギー密度はスケール因子の 3 乗に反比例する。つまり、現在時刻の物質のエネルギー密度を  $\rho_{m0}$  と書くと、

$$\rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{a(t_0)}{a(t)}\right]^3 = \rho_{m0} a^{-3}(t) . \quad (8.33)$$

<sup>\*9</sup>  $\rho$  は質量密度として定義されていることもあるので注意すること。その場合、エネルギー密度は  $\rho c^2$  になる。

<sup>\*10</sup> Einstein 方程式は本来 10 成分存在するのに、2 つしか独立な方程式が出てこないのは一様等方という高い対称性を仮定したからである。

<sup>\*11</sup> 陽子や中性子、または、クォークのこと。レプトン (電子やニュートリノなどの素粒子) は含まない。原子の質量はほぼ陽子や中性子で決まるので、原子はバリオンから構成されていると考えてよく、レプトンは宇宙のエネルギー構成要素の文脈では通常考えない。

<sup>\*12</sup> 相対性理論では光速に近い速度で運動している場合を相対論的と呼ぶが、定量的には  $E^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2$  において、右辺第 1 項が卓越する場合を非相対論的、右辺第 2 項が卓越する場合を相対論的と呼んで区別している。

<sup>\*13</sup> ここで  $\rho$  はエネルギー密度であって、質量密度ではないので注意すること。宇宙論では  $c = 1 = \hbar$  の自然単位系が用いられることが多いが、その場合、両者は区別されない。

ここで、 $t_0$  は現在の時刻であり、 $a(t_0) = 1$  とした\*14。

(8.32) 式で  $\rho = \rho_m, p = 0$  とすると、

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\rho_{m0}}{a}, \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \frac{\rho_{m0}}{a^2}. \quad (8.34)$$

第 1 式 (Friedmann 方程式) の解は

$$a = \left[ \frac{6\pi G \rho_{m0}}{c^2} \right]^{1/3} t^{2/3}. \quad (8.35)$$

この解、または、第 2 式 (加速度方程式) から分かるように、宇宙は減速膨張する。

## 2. 輻射優勢の宇宙

宇宙膨張により光子数密度が希釈されるのに加えて各光子は赤方偏移を受ける\*15ので、輻射のエネルギー密度はスケール因子の 4 乗に反比例する。つまり、現在時刻の物質のエネルギー密度を  $\rho_{r0}$  と書くと、

$$\rho_r(t) = \rho_{r0} \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 = \rho_{r0} a^{-4}(t). \quad (8.36)$$

(8.32) 式で  $\rho = \rho_r, p = \rho_r/3$  とすると、

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\rho_{r0}}{a^2}, \quad \ddot{a} = -\frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\rho_{r0}}{a^3}. \quad (8.37)$$

第 1 式 (Friedmann 方程式) の解は

$$a = \left[ \frac{32\pi G \rho_{r0}}{3c^2} \right]^{1/4} t^{1/2}. \quad (8.38)$$

この解、または、第 2 式 (加速度方程式) から分かるように、宇宙は減速膨張する。同じエネルギー密度に対しては物質より輻射の方が減速率は大きくなる。

## 8.5 宇宙加速膨張とダークエネルギー

最近の観測では、宇宙が加速膨張していることが明らかになった。物質や輻射は宇宙を減速膨張させるので、“普通ではない” 何らかのエネルギーが宇宙に存在していることを意味している。加速度方程式より

$$\ddot{a} > 0 \quad \longrightarrow \quad \rho + 3p < 0 \quad \longrightarrow \quad p < -\rho/3 \quad (8.39)$$

が満たされなければならない。つまり、大きな負の圧力を持つエネルギー源が必要である。我々はそのようなものを知らないの、とりあえず、ダークエネルギーと呼んでいる。ダークエネルギーの状態方程式は一般に  $p = w\rho$  と表され、 $w < -1/3$  が加速膨張を起こすための条件になる。この記法に従うと、物質は  $w = 0$ 、輻射は  $w = 1/3$  である。

\*14 FLRW 計量で用いている座標系ではスケール因子は無次元量なのでこのような規格化が可能である。

\*15 物質の場合は赤方偏移しない。なぜならば、 $E^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2$  より  $E \approx mc^2$  となり、 $E = \hbar\omega$  は定数だからである。

$w < -1/3$  を満たすものとして真空エネルギー（ゼロ点エネルギー）がある。元々は Einstein により宇宙膨張しない、静止宇宙を作るために宇宙項として Einstein 方程式に導入された：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (8.40)$$

FLRW 計量（平坦、 $K = 0$ ）に対して Einstein 方程式を書き下すと

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho + \frac{c^2 \Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p) + \frac{c^2 \Lambda}{3} \end{cases} , \quad (8.41)$$

となり、実効的に  $\rho, p$  として解釈する<sup>\*16</sup>と

$$\rho_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} , \quad p_\Lambda = -\frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} , \quad (8.42)$$

となる。宇宙項の状態方程式は  $w = -1$  になっていることが分かる。宇宙項のエネルギー密度は宇宙膨張に対して希釈されないことから、真空エネルギー（ゼロ点エネルギー）と同じエネルギー成分とみなせる。

宇宙項優勢の宇宙では Friedmann 方程式は

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda} = H = \text{const.} , \quad (8.43)$$

となる。解は

$$a = a_0 e^{Ht} , \quad (8.44)$$

である。つまり、宇宙項優勢の宇宙は指数関数的に（加速しながら）膨張する。

我々の宇宙には、物質（バリオンやダークマター）や輻射（光やニュートリノ）の他に、エネルギー密度で 70% 程度を占めるダークエネルギーが存在していることが分かっている。物質、輻射、宇宙項のスケール因子依存性は

$$\rho_m \propto a^{-3} , \quad \rho_r \propto a^{-4} , \quad \rho_\Lambda = \text{const.} , \quad (8.45)$$

であるので、宇宙の過去に遡ると（ $a$  が小さくなると）物質優勢宇宙になり、さらに過去に遡ると輻射優勢宇宙になることが分かる（図 8.1 参照）。輻射優勢宇宙で  $a \rightarrow 0$  の極限がビッグバン（高温高密度の火の玉状態）である。我々の宇宙では、物質と輻射が等密度になるのが  $a \sim 3 \times 10^{-4}$ （宇宙年齢  $\sim 4.7$  万年）、物質と宇宙項が等密度になるのが  $a \sim 0.75$ （宇宙年齢  $\sim 10$  億年）となっている。

我々の宇宙の年齢は約 137 億年であるので、宇宙年齢  $\sim 10$  億年は宇宙の歴史の中ではごく最近の出来事である。問題は、なぜ現在の宇宙で急にダークエネルギーが優勢になり、宇宙が加速膨張を始めたのか、である。それだけではなく、もしダークエネルギーの起源が真空エネルギーだとすると、理論予言値は現在の宇宙の平均密度（ほぼ臨界密度）よりも 123 桁も大きくなってしまふ。様々な候補は考えられているが、納得のいく説明はまだ無い。

<sup>\*16</sup> 左辺に移項すると、時空の量に対して修正が施されることになるので、重力理論の拡張と解釈することもできる。

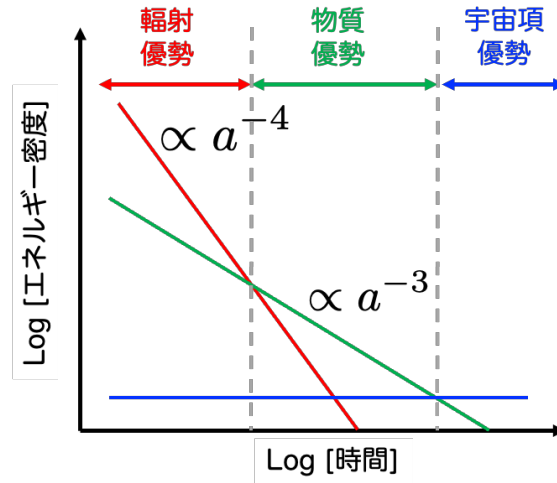


図 8.1 宇宙膨張と優勢なエネルギー成分.

## 8.6 宇宙の曲率と宇宙の運命

ここまでの計算では  $K = 0$  としていたが、 $K \neq 0$  の場合について考えてみることにする。曲率の符号を決める、しきい値となるエネルギー密度は、Friedmann 方程式で  $K = 0$  とすることにより定義することができる。

$$\rho_c \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G}, \quad (8.46)$$

$\rho_c$  は臨界密度と呼ばれる。臨界密度の現在の値は  $\rho_{c0}$  と表される。 $\rho_c$  よりエネルギー密度が大きければ（小さければ）曲率は正（負）である。

宇宙の曲率が正か負か、または、ゼロかは宇宙の未来の運命を決めるので重要である。(8.41) 式の Friedmann 方程式を

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2} + V(a) = E, \quad V(a) \equiv -a^2 \frac{\rho}{\rho_{c0}}, \quad E \equiv -\frac{c^2}{H_0^2} K, \quad (8.47)$$

と書き直すと、エネルギー保存則として解釈することができる。宇宙に物質、輻射、宇宙項が存在しているならば、ポテンシャルは

$$V(a) = -\frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}} a^{-1} - \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}} a^{-2} - \frac{\rho_{\Lambda 0}}{\rho_{c0}} a^2, \quad (8.48)$$

で与えられ、極大値  $V_{\max} (< 0)$  を持つ。ポテンシャルと曲率の関係を図 8.2 に示す。

- $E > V_{\max}$  ( $K \leq 0$  を含む) の場合:  $\dot{a} > 0$  の宇宙は時間が経つにつれて減速するが、膨張を続け、宇宙項が優勢になると加速膨張に転じ、やがて宇宙の大きさは無限大になる。
- $E = V_{\max}$  ( $K$  が正で特殊な値) の場合:  $\dot{a} > 0$  の宇宙は時間が経つにつれて減速し、無限大の時間をかけて、ある有限な大きさで膨張が止まる（不安定点なので僅かな摂動で宇宙の運命は変わる）。

- $E < V_{\max}$  ( $K$  が大きな正の値) の場合:  $\dot{a} > 0$  の宇宙は時間が経つにつれて減速し、ある有限の大きさに達したところで膨張は止まり、宇宙は収縮に転ずる。やがて宇宙は有限の時間で 1 点に潰れてしまう。

最近の観測から、我々の宇宙の曲率はほぼ平坦に近いことが分かっているので、1 つ目の場合になる。宇宙は減速膨張から加速膨張に転じ、無限大の大きさまで膨張し続ける。

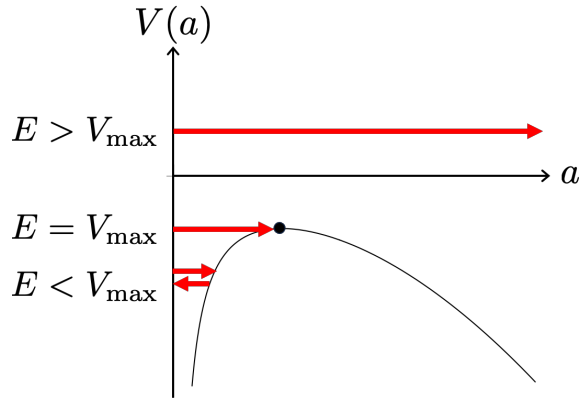


図 8.2 宇宙の曲率とポテンシャル。最近の観測による宇宙論パラメータ、 $\rho_{m0}/\rho_{c0} = 0.3$ ,  $\rho_{r0}/\rho_{c0} \approx 0$ ,  $\rho_{\Lambda 0}/\rho_{c0} = 0.7$  に選んだ場合。

## 8.7 宇宙の地平面と観測可能な宇宙

Hubble の法則は、宇宙膨張によって遠方にある銀河ほどより速く遠ざかっているように見える、というものであった。さらに遠方を考えると、いずれ後退速度が光速を超えてしまい、光でさえ我々に届かなくなる限界が存在する。つまり、ある時刻  $t$  から過去の時間原点まで遡った時に観測できる距離限界、もしくは、因果関係を持てる距離限界が存在し、宇宙の地平面 (粒子的地平面) として以下のように定義される。

粒子的地平面

$$d_H(t) \equiv a(t)x_H(t), \quad x_H(t) \equiv c \int_0^\eta d\eta = c \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (8.49)$$

ここで、 $\eta$  は  $d\eta = dt/a(t)$  によって定義される共形時間 (宇宙膨張を抜きにした時間) である。粒子に対しては固有時間に対応する。

- 物質優勢の宇宙では、スケール因子は (8.35) 式で与えられたので、粒子的地平面は

$$d_H = t^{2/3} \int_0^t \frac{c dt'}{(t')^{2/3}} = 3ct. \quad (8.50)$$

- 輻射優勢の宇宙では、スケール因子は (8.38) 式で与えられたので、粒子的地平面は

$$d_H = t^{1/2} \int_0^t \frac{c dt'}{(t')^{1/2}} = 2ct. \quad (8.51)$$

- 宇宙項優勢の宇宙では、スケール因子は (8.44) 式で与えられたので、粒子的地平面は

$$d_H = \frac{c}{H} (e^{Ht} - 1) \approx \frac{c}{H} e^{Ht}. \quad (8.52)$$

粒子的地平面  $d_H$  は宇宙膨張により時間と共に大きくなっていく。特に、宇宙項優勢の宇宙では粒子的地平面が指数関数的に増大する。 $t$  を現在 ( $t = t_0$ ) ととると、粒子的地平面の距離は我々が観測可能な宇宙の距離になる。つまり、我々が観測している宇宙の領域も、因果関係を持てる領域も広がってはいるものの有限である、ということである。

## 8.8 初期宇宙とインフレーション (ビッグバン以前の宇宙)

我々が現在観測している宇宙は極めて一様等方である。前節で、粒子的地平面は時間と共に広がっていることを述べたが、宇宙の過去に遡ると粒子的地平面は現在よりもずっと小さかったことになる。初期宇宙においてビッグバンが起こり、物質や輻射が一斉に生成されたとすると、互いに因果関係を持たず、独立した領域が一様等方になっているのは極めて不自然である。これを地平面問題と言う。

$dt = a d\eta$  という時間座標 ( $\eta$  は共形時間) を考えると、FLRW 計量 (角度方向は固定) は

$$ds^2 = a(t)^2 [-c^2 d\eta^2 + dx^2], \quad (8.53)$$

となり、宇宙膨張を除いた、共動座標系 ( $\eta, x$ ) で時空の因果関係を調べることができる。本節の最初で述べた内容は図 8.3 のように図示することができる。

我々が観測している宇宙が一様等方であるためには、初期宇宙において大きな領域が因果関係を持つようにしなければならない。それを可能にするのがインフレーションという理論モデルである。インフラトンというスカラー場を考えると、インフラトンのエネルギー密度と圧力 (空間的に一様な成分のみを考える) は

$$\rho_\phi = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (8.54)$$

となるので、インフラトンがゆっくりと運動していて (振幅  $\phi$  が変化していて) ポテンシャル項が優勢であれば、状態方程式は  $w = p_\phi/\rho_\phi = -1$  となり、宇宙項と同じ役割を果たす。

前節で導いたように、粒子的地平面は  $d_H \sim e^{Ht}$  と指数関数的に大きくなるので、宇宙の因果領域を一気に広げることができる。

インフレーションは他にも宇宙の重要問題を解決する。

- 平坦性問題 :

現在の宇宙が極めて平坦に近づいている問題。初期条件が驚くべき精度で微調整されていなければ、現在のように平坦にはならない。インフレーションの急激な宇宙膨張のおかげで、宇宙の曲率は極めて

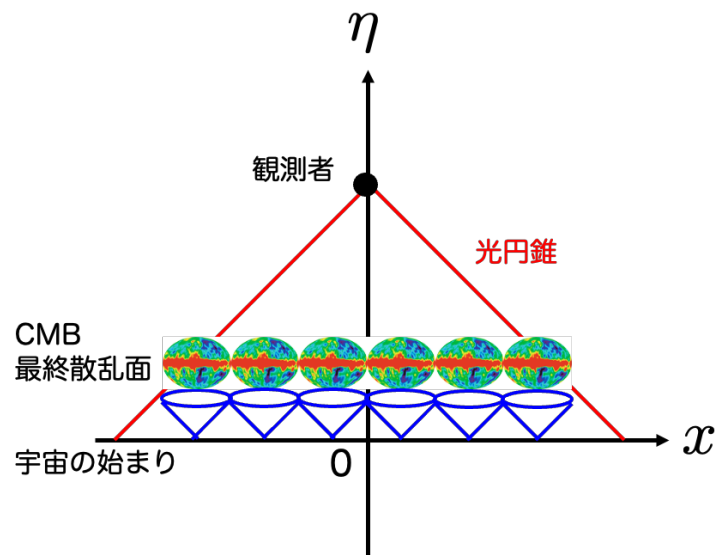


図 8.3 宇宙の因果関係を持つ領域.

ゼロに近づく。

- モノポール問題：

高エネルギー状態の初期宇宙で大統一理論が正しい理論であれば、磁気単極子が多量に生成されることが知られている。宇宙の臨界密度を超えた量が作られると宇宙はすぐに潰れてしまうし、我々が磁気単極子を観測していないことから、現在の宇宙には存在してはいけない。インフレーションが起これば、そのような都合の悪い粒子の数密度を希釈してほぼゼロにしてくれるので、モノポール問題は解決する。

- ゆらぎの起源問題：

我々の宇宙は星や銀河が存在し、非一様になっている。宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) も僅かな温度ゆらぎ ( $\sim 10^{-6}$  K) を持っている。このようなゆらぎの種が宇宙の初期に作られなければ、現在の宇宙のような非一様性は存在しない。インフレーションはスカラー場の量子ゆらぎを宇宙膨張により急激に引き延ばし、古典化させることで非一様性の種を作ると考えられている。

## 8.9 演習問題

[問] 一様等方宇宙モデルの計量 (FLRW 計量) を仮定して Einstein 方程式から Friedmann 方程式と加速度方程式を導け。

## 第9章

# 重力波

### 9.1 重力波の歴史

- 1916年（一般相対論が発表された翌年）、Einstein が予言した、光速で伝播する時空の歪み。星の爆発や衝突、振動など、重力場の激しい変化により生成される。
- 1969年、共振型の重力波検出器を用いて重力波を検出したという論文が Weber により発表された。その後の再現性が無いことから、今では誤報であったと考えられている。
- 1970年以降、重力波観測実験のための検出器が研究され始める。地球に届く重力波の振幅は典型的には  $h \sim \Delta L/L \sim 10^{-21}$  (100 Hz で)<sup>\*1</sup> なので直接観測は技術的にずっと難しかったが、連星パルサー (PSR B1913+16) の公転周期の変化から間接的な証拠は得られていた。
- 1993年、ノーベル物理学賞 “重力研究の新しい可能性を開いた新型連星パルサーの発見”, Hulse and Taylor.
- 1999年、日本の TAMA 検出器 (基線長 300 m) が大型検出器<sup>\*2</sup>として世界で初めて観測を開始。2002年にはアメリカにある LIGO (基線長 4 km) も観測を開始。
- 2015年、重力波が LIGO 検出器により初観測される。ブラックホール連星の合体によって生じた重力波であった。
- 2017年、イタリアにある Virgo 検出器が共同観測に参加。中性子星連星の合体によって生じた重力波が初観測される。
- 2017年、ノーベル物理学賞 “LIGO 検出器および重力波の観測への決定的な貢献”, Barish, Thorne, and Weiss.
- 2019年、日本にある KAGRA 検出器が共同観測に参加。

---

\*1 重力波振幅は距離に対する割合なので、太陽と地球の間の距離が水素原子 1 個分変化する程度の微小な変化である。

\*2 大型の定義がある訳ではないが、多くの場合、100 m 以上の検出器をそう呼んでいる。

## 9.2 重力波の波動方程式

重力波の波動方程式の導出

Minkowski 時空からの摂動を考える：  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  .

→ Einstein 方程式を線形化する。

→  $h_{\mu\nu}$  の変数変換をし、Lorentz ゲージ (重力波の自由度を抜き出す座標系) をとる。

→ 重力波の波動方程式：

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (9.1)$$

Minkowski 時空からの摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 . \quad (9.2)$$

摂動の 1 次までを考えると

$$h^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} , \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} , \quad (9.3)$$

のように  $\eta_{\mu\nu}$  を用いて添字を上げ下げできる。接続係数は

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \approx \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) , \quad (9.4)$$

と書け、Ricci テンソル、Ricci スカラーも定義から

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} [h_{\nu}{}^\alpha{}_{,\alpha\mu} + h_{\mu}{}^\alpha{}_{,\alpha\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h_{,\mu\nu}] , \quad (9.5)$$

$$R \approx h^\mu{}_\alpha{}^{,\alpha}{}_{,\mu} - h^{,\alpha}{}_{,\alpha} , \quad (9.6)$$

と計算できる。これらの量は全て  $\mathcal{O}(|h|)$  のオーダーになる。したがって、Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} \approx R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \approx \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (9.7)$$

より、 $T_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(|h|)$  と仮定すると\*3

$$-\square h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \square h) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (9.8)$$

を得る。これは線形化された Einstein 方程式である。ここで、

$$h \equiv h^\mu{}_\mu , \quad \square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu , \quad (9.9)$$

\*3 今、Minkowski 時空周りでの摂動展開を考えているので、 $T_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(1)$  だと背景時空が Minkowski 時空であることと矛盾する。

を定義した。□ はラプラシアン<sup>4</sup>の 4 次元時空版であり、ダランベルシアンと呼ばれる。方程式から  $h$  を消すように、新たな変数

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad \longrightarrow \quad \tilde{h} \equiv \tilde{h}^\mu{}_\mu = -h, \quad h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\tilde{h}, \quad (9.10)$$

を定義すると

$$-\square\tilde{h}_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\alpha}{}_{,\nu} + \tilde{h}_{\nu\alpha}{}_{,\mu} - \eta_{\mu\nu}\tilde{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (9.11)$$

となる。

次に、座標変換の自由度を用いて方程式を簡単化する。座標変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$  ( $\xi^\mu$  は微小量) を行うと計量は

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}), \quad (9.12)$$

と変換されるので、 $\eta_{\mu\nu}$  は定数であることに注意して  $h_{\mu\nu}$  も

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}), \quad (9.13)$$

と変換される。これに (9.10) 式を代入して

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{h}'_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\tilde{h}' - \tilde{h}) \quad (9.14)$$

$$= \tilde{h}_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha}, \quad (9.15)$$

1 行目から 2 行目では (9.14) 式のトレースをとり、 $\tilde{h}' = \tilde{h} + 2\xi^\alpha{}_{,\alpha}$  となることを用いた。 $\xi_\mu$  (4 つの関数形) は都合の良いように選ぶことができるので、 $\tilde{h}'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$  となるように選ぶ。つまり、

$$\tilde{h}'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \tilde{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \square\xi^\mu, \quad (9.16)$$

より、 $f^\mu(x) \equiv \tilde{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$  とすると  $\square\xi^\mu = f^\mu(x)$  を満たすように選べば  $\tilde{h}'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$  が満たされる。このような座標系を Lorentz ゲージ (または、調和ゲージ) と言う。よって、Lorentz ゲージにおいては求める方程式は極めて簡単化され、

$$\square\tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (9.17)$$

を得る。これが重力波の波動方程式である。

(9.17) 式は Green 関数を用いて形式的に解くことができる<sup>\*4</sup>。一般解は

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (9.21)$$

\*4 Green 関数は

$$\square G(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'), \quad (9.18)$$

によって定義される。その解は

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta[(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) - ct'], \quad (9.19)$$

で与えられる。(9.17) 式に対する解は

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x'), \quad (9.20)$$

となる。

ここで、 $\mathbf{x}'$  は物質の位置ベクトルである。つまり、エネルギー運動量テンソルが重力波の波源となる<sup>\*5</sup>ことが分かる。(9.21) 式は、物質の運動が光速に比べて遅いとして ( $v/c$  を微小パラメータとして) 展開することができる。その主要項は

$$\tilde{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (9.22)$$

$$Q_{ij}(t) \equiv \int \rho(t, \mathbf{x}') \left( x'_i x'_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) d^3 \mathbf{x}', \quad (9.23)$$

で与えられる<sup>\*6</sup>。(9.44) 式は 4 重極モーメントの定義であり、(9.22) 式は重力波が 4 重極モーメントの 2 階時間微分によって与えられることを示しているので、4 重極公式と呼ばれている。逆に考えると、重力波は球対称な系が球対称を保ったまま加速していても放射されない。例えば、完全に球対称な星の重力崩壊など。また、軸対称に回転している星からも放射されない。4 重極モーメントの 2 階時間微分が必要である。現実には、星の重力崩壊は完全に球対称ではないし、回転している星も表面に山のような凹凸があれば、重力波を放射する。

### 9.3 重力波の伝播

生成された重力波が真空中を伝播する場合を考えよう。(9.17) 式は真空中では

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (9.24)$$

となる。ここでは、重力波の性質を調べるのが目的なので、簡単のため、以下のように平面波を仮定する<sup>\*7</sup>。

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad k_\alpha x^\alpha = k_0 x^0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}. \quad (9.25)$$

ここで、 $A_{\mu\nu}$  は  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  が計量であることから  $\mu, \nu$  に対して対称である。この解を (9.24) 式に代入すると、

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad k_\mu = (-\omega/c, \mathbf{k}) \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = c^2 k^2, \quad k \equiv |\mathbf{k}|, \quad (9.26)$$

が得られる。これは重力波は光速で伝播することを意味する。また、4 次元波数ベクトルは

$$k_\mu = (-k, \mathbf{k}), \quad k^\mu = (k, \mathbf{k}), \quad (9.27)$$

と書くことができる。

次に、 $A_{\mu\nu}$  の物理的自由度について調べる。前節で述べたように、座標変換により  $\tilde{h}^{\mu\nu},_{,\nu}$  は  $\square \xi^\mu$  だけ変化するが、もし  $\square \xi^\mu = 0$  を満たしていれば、座標変換後も Lorentz ゲージ条件  $\tilde{h}^{\mu\nu},_{,\nu} = 0$  は満たされる。実際に、

$$\xi^\mu = B^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (9.28)$$

<sup>\*5</sup> 物体自身が重力波を放射するという描像は間違っている。実際は、物体が作る周りの時空 (重力場) から重力波を生成される。さもないと、ブラックホール連星からの重力波は我々に届かない。

<sup>\*6</sup> 例えば、M. Maggiore / Gravitational Waves, Vol.1: Theory and Experiments (Oxford University Press, 2008) で丁寧に導出されている。

<sup>\*7</sup> 波動方程式は線形なので、一般的な波形の場合でも平面波の重ね合わせになる。つまり、フーリエ変換をして各周波数成分を考えると同等である。

と選ぶと、(9.24), (9.25) 式から分かるように  $\square\xi^\mu = 0$  を満たしているが、まだ  $B^\mu$  の不定性 (ゲージ自由度と呼ばれる) が残っていることが分かる。ゲージ変換は元々  $\xi^\mu$  が微小量であることを仮定していたので、今の場合  $B^\mu$  が微小量である。(9.15) 式より  $A_{\mu\nu}$  は

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - i(B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu - \eta_{\mu\nu} B^\alpha k_\alpha), \quad (9.29)$$

と変換される\*8)ので、以下の性質を持つように  $B^\mu$  を選ばう\*9)。

$$\tilde{A} \equiv \tilde{A}^\mu{}_\mu = 0, \quad \tilde{A}_{0\nu} = 0. \quad (9.30)$$

そのトレースと  $(0, i)$  成分を具体的に書き出すと、次の2式が成り立つ必要がある。

$$\tilde{A} = A + 2i(kB_0 + k^i B_i) = 0, \quad (9.31)$$

$$\tilde{A}_{0i} = A_{0i} - i(k_i B_0 - k B_i) = 0, \quad (9.32)$$

行列の形で書くと

$$\begin{pmatrix} k & k^i \\ -k_j & \delta_j^i k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} A/2 \\ A_{0j} \end{pmatrix}. \quad (9.33)$$

これを満たす  $B_\mu$  の解が存在するためには、左辺の係数行列の行列式が非ゼロであればよい。実際、行列式は  $k^2(k^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 2k^4$  となり、非ゼロになるので、解が存在する。したがって、ゲージ変換により(9.30) 式を満たせることが示された。このように選んだゲージは TT (transverse-traceless) ゲージと呼ばれる。その理由は以下で述べる。

簡単のため、重力波は  $z$  方向に伝播しているとして  $k_\mu = (-k, 0, 0, k)$  とする\*10)。ここで、最初に課した Lorentz ゲージ条件  $\tilde{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$  を考えると

$$\tilde{A}^{\mu\nu} k_\nu = \tilde{A}^{\mu j} k_j = 0, \quad (9.34)$$

となり、 $\mu = i$  の時には  $\tilde{A}^{i3} = 0$  を得る。重力波振幅の成分は  $x, y$  方向しか存在せず、伝播方向とは直交しているので、重力波は横波 (transverse) であることが分かる。また、 $\tilde{A}^\mu{}_\mu = 0$  は  $\tilde{A}_{0\nu} = 0$  より  $\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{33} = 0$  を意味するが、 $\tilde{A}_{33} = 0$  なので、 $\tilde{A}_{11} = -\tilde{A}_{22}$  となっている。つまり、トレースなし (traceless) である。したがって、(9.30) 式のゲージ条件は重力波振幅を transverse かつ traceless にしている。

以上をまとめると、重力波の自由度は座標変換によって消せない、 $A_{11} = -A_{22}$  と  $A_{12} = A_{21}$  の2成分のみが存在する。これら2つの自由度は + (プラス) モード、× (クロス) モードと呼ばれる、2つの偏極モードに対応する。

\*8) ここでは座標変換後の  $A_{\mu\nu}$  を  $\tilde{A}_{\mu\nu}$  と表している。

\*9)  $\tilde{A} = 0$  の条件は  $\tilde{A}_{00}$  に対する条件とみなせるので、独立な4つの条件を課していることになる。

\*10) 今、真空中での伝播を考えているので、等方的であり、ある特定の方向をとっても一般性を失わない。

重力波の平面波解 ( $z$  方向に伝播)

$$\tilde{h}_{ij} = (A_+ e_{ij}^+ + A_\times e_{ij}^\times) e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (9.35)$$

$$e_{ij}^+ \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{ij}^\times \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.36)$$

図 9.1 に 2 つの偏極モードと振動の様子を示す。

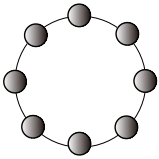
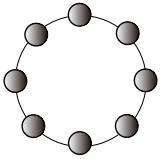
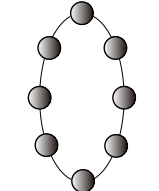
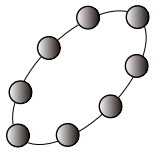
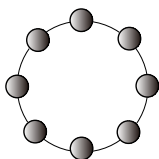
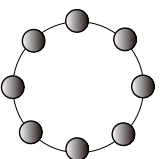
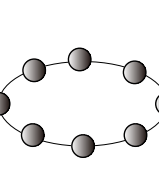
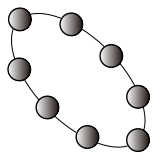
	+ mode	× mode
0		
$\pi/2$		
$\pi$		
$3\pi/2$		

図 9.1 重力波の + (プラス) モードと × (クロス) モード。重力波は紙面に垂直に伝播している。

## 9.4 重力波の TT ゲージへの射影

重力波の物理的自由度は TT ゲージをとることによって抜き出せるのであった。そこで、重力波  $h_{ij}$  を TT ゲージでの成分  $h_{ij}^{\text{TT}}$  へ射影するテンソルを以下のように定義する。

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}, \quad (9.37)$$

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (9.38)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{n}}$ 、もしくは、その成分の  $n_i$  は重力波の伝播方向を向いた単位ベクトルであり、

$$\hat{\mathbf{n}} \equiv \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad r \equiv |\mathbf{x}|. \quad (9.39)$$

で定義されている。 $P_{ij}$  は重力波の伝播方向の成分を差し引き、横波 (transverse) 成分を抜き出す射影を行う。実際、 $P_{ij}n^j = 0$  となるので、伝播方向と垂直な方向に射影されている。重力波は 2 階テンソルであるので、各添字 (各ベクトル) に対して射影を行うため、射影テンソルの第 1 項は  $P_{ik}P_{jl}$  となっている。射影テンソルの第 2 項はトレース成分を差し引いている。実際にトレースをとった時に射影テンソルは

$$\Lambda_{i,j,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_i^i P_{kl} = P_{kl} - P_{kl} = 0, \quad (9.40)$$

となり、トレース部分が残らないこと (traceless) が示せる。ここでは、 $P_{ik}P_{jl} = P_{kl}$  となることと、 $P_i^i = 2$  となることを用いた。

射影テンソルは、対称テンソル  $h_{kl}$  に作用することを考えると、定義により添字  $i$  と  $j$ 、または、 $k$  と  $l$  に対して対称、つまり、

$$\Lambda_{ij,kl} = \Lambda_{ji,kl} = \Lambda_{ji,\ell k}, \quad (9.41)$$

である。この射影テンソルを用いて重力波の TT ゲージでの成分は

$$\tilde{h}_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\tilde{h}_{kl}(t, \vec{x}), \quad (9.42)$$

として得られ、重力波の自由度が抜き出される。

## 9.5 重力波の放射

上で定義した TT ゲージへの射影テンソルを用いると、重力波の四重極公式は次のように与えられる。

重力波の四重極公式 (TT ゲージ)

$$\tilde{h}_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{Q}_{kl} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (9.43)$$

$$Q_{ij}(t) \equiv \int \rho(t, \vec{x}') \left( x'_i x'_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) d^3 x', \quad (9.44)$$

具体的に、同じ質量の星からなる連星によって放射される重力波を考えよう。連星の公転面を  $xy$  平面にとると

$$\begin{aligned} \rho(t - r/c) &= m \delta[x - R \cos \omega(t - r/c)] \delta[y - R \sin \omega(t - r/c)] \delta[z] \\ &+ m \delta[x + R \cos \omega(t - r/c)] \delta[y + R \sin \omega(t - r/c)] \delta[z], \end{aligned} \quad (9.45)$$

と書ける。ここで、 $\delta[\dots]$  は Dirac のデルタ関数である。この質量密度を (9.44) 式に代入すると

$$Q_{ij}(t - r/c) = 2mR^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega(t - r/c) - 1/3 & \cos \omega(t - r/c) \sin \omega(t - r/c) & 0 \\ \cos \omega(t - r/c) \sin \omega(t - r/c) & \sin^2 \omega(t - r/c) - 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.46)$$

となり、さらに時間の 2 階微分をとると

$$\ddot{Q}_{ij}(t-r/c) = -4mR^2\omega^2 \begin{pmatrix} \cos 2\omega(t-r/c) & \sin 2\omega(t-r/c) & 0 \\ \sin 2\omega(t-r/c) & -\cos 2\omega(t-r/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.47)$$

となる。次は、(9.43) 式に従って TT ゲージに射影することになるが、ここでは簡単のため、 $z$  方向に放射される重力波を考えよう。そうすると、上で求めた  $\ddot{Q}_{ij}(t)$  は既に TT 成分のみになっているので、射影することなく、そのまま用いればよい。したがって、TT ゲージでの重力波は

$$\tilde{h}_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = -\frac{8GmR^2\omega^2}{c^4 r} \begin{pmatrix} \cos 2\omega(t-r/c) & \sin 2\omega(t-r/c) & 0 \\ \sin 2\omega(t-r/c) & -\cos 2\omega(t-r/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.48)$$

となる。重要なことは、放射される重力波の周波数が 2 倍になっていることである。これは重力波源が今の場合、四重極 (180° 回転させると元に戻る) になっていることを反映している。また、連星の質量が大きいほど放射される重力波の振幅は大きくなる。これは連星の周辺の重力が強くなるからである。

任意の方向に放射される重力波を計算するには、伝播方向の単位ベクトル  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi)$  を用いて射影テンソル  $\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})$  を計算し、 $\ddot{Q}_{ij}(t)$  に作用させればよい。しかし、既に  $z$  方向の  $\tilde{h}_{ij}^{\text{TT}}$  を求めたので、それを回転させる方が簡単である。回転行列<sup>\*11</sup>

$$R(\theta, \phi) = R_z(\phi)R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (9.49)$$

を用いて任意の方向へ放射される重力波は  $z$  方向へ伝播する重力波を回転させることで

$$\tilde{h}_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = R_{ik}R_{j\ell}\tilde{h}_{k\ell}^{(z)}(t, \vec{x}), \quad (9.50)$$

と計算される。ここで、重複する添字については和をとっている。

## 9.6 重力波のエネルギー

連星パルサーの公転周期の観測から重力波がエネルギーを持ち去っていることは今では明らかであるが、重力波がエネルギーを持つのかどうかについては 1960 年代以前に論争があった。一般相対論では座標変換によりいつでも局所慣性系がとれるので、局所慣性系では重力波のエネルギーは消えてしまう。もし重力波のエネルギーが存在するのならば、それは非局所的に定義されなければならない<sup>\*12</sup>。しかし、非局所的なエネルギー保存則とはどのようなものなのか。また、重力波は計量の一部であるので、背景時空と重力波を分ける基準を定義しておかなければ、エネルギーが定義できない。そのような客観的な基準は設定することができるのか。

重力波エネルギーの非局所性については以下の議論からも理解できる。一般相対論におけるエネルギー運動量保存の式は

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (9.51)$$

<sup>\*11</sup> ここでの回転角の定義は、まず  $y$  軸周りに  $\theta$  だけ回転し、次に  $z$  軸周りに  $\phi$  だけ回転している。教科書や文献によって定義が異なるので注意すること。

<sup>\*12</sup> 波として存在するためには波長程度は広がっていないといけなないので、重力波のエネルギーが局所的に定義されないのはある意味で自明である。

であった。この式は共変微分を偏微分で書き直すと

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu})_{,\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} T^{\alpha\nu} = 0, \quad (9.52)$$

となる。この式は局所慣性系では当然  $T^{\mu\nu} = 0$  に帰着するが、第 2 項の接続係数は平行移動を用いてやや広がった空間体積において定義されるので、非局所的な重力場を考慮する必要があることを示している。

何を基準に背景時空と重力波を分けるのかという問題は、以下のように Einstein 方程式の摂動展開により議論される。まず、背景時空は曲率がゼロでなければ特徴的な距離スケール (曲率半径)  $L$  を持つ。一方、重力波は時空の波であるので、その特徴的な長さスケールは波長  $\lambda$  で与えられる。我々が重力波を認識できるのは  $\lambda \ll L$  の場合のみである。しかも、数波長に渡って観測しないと重力波とは認識できない。もし 1 波長よりも小さな距離スケールで観測していると重力波は波に“見えない”。したがって、背景時空と重力波は距離スケールの違いに着目することにより

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad (9.53)$$

と定義される。重力波の特徴的な振幅は時空の摂動なので微小量である。その微小量を  $\epsilon$  と書くと、各量のオーダーは

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \mathcal{O}(1), \quad g_{\mu\nu,\alpha}^{(0)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right), \quad g_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right), \quad (9.54)$$

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad h_{\mu\nu,\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right), \quad h_{\mu\nu,\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right), \quad (9.55)$$

などとなる。重力波は真空中でも存在するので、 $T_{\mu\nu} = 0$  として Einstein 方程式を調べればよい。Einstein テンソル、 $G_{\mu\nu}$  を  $\epsilon$  で摂動展開すると

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \mathcal{O}\left[g_{\mu\nu,\alpha}^{(0)}, h_{\mu\nu,\alpha}\right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}, \frac{\epsilon}{\lambda}\right), \quad (9.56)$$

$$R_{\mu\nu} = \mathcal{O}\left[\Gamma_{\nu\alpha,\beta}^{\mu}, (\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu})^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}, \frac{\epsilon}{\lambda^2}, \frac{\epsilon}{L\lambda}, \frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right), \quad R = \mathcal{O}[R_{\mu\nu}], \quad (9.57)$$

より

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} R^{(0)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right), \quad (9.58)$$

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} R^{(0)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} R^{(1)} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right) - \mathcal{O}\left(\epsilon \cdot \frac{1}{L^2}\right) - \mathcal{O}\left(1 \cdot \frac{\epsilon}{\lambda^2}\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right), \quad (9.59)$$

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} R^{(1)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} R^{(2)} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right) - \mathcal{O}\left(\epsilon \cdot \frac{\epsilon}{\lambda^2}\right) - \mathcal{O}\left(1 \cdot \frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right), \quad (9.60)$$

$$G_{\mu\nu}^{(\geq 3)} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^3}{\lambda^2}\right), \quad (9.61)$$

となる。重力波の数波長に渡る平均を  $\langle \dots \rangle$  と書くと  $\langle G_{\mu\nu}^{(1)} \rangle = 0$  であるので、 $G_{\mu\nu}^{(0)} \sim \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$  とならなくてはならない<sup>\*13</sup>。つまり、

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right) \quad \longrightarrow \quad \lambda = \mathcal{O}(\epsilon L). \quad (9.63)$$

<sup>\*13</sup> 重力波の 2 つの波数モードを  $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}$ ,  $e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}$  とすると

$$G_{\mu\nu}^{(2)} \propto h_1 \times h_2 \propto e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \quad (9.62)$$

であるので、 $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$  でなければ背景時空のような低周波 (波長  $L$ ) のモードを作れない。

これを用いると各オーダーでは

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon L^2}\right) : G_{\mu\nu}^{(1)} = 0, \quad (9.64)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) : G_{\mu\nu}^{(0)} + \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = 0, \quad (9.65)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{L^2}\right) : G_{\mu\nu}^{(\geq 3)} + G_{\mu\nu}^{(2)} - \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = 0, \quad (9.66)$$

が満たされないといけない。(9.64) 式は  $h_{\mu\nu}$  の発展方程式、つまり、重力波の波動方程式、(9.65) 式は背景時空を決める方程式、(9.66) 式は残りの高次項の式と解釈できる。そうすると、 $\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$  が重力波に起因するエネルギーであり、背景時空の曲率を決めるという結論に達する。したがって、

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{\text{GW}}, \quad (9.67)$$

となるように重力波のエネルギー運動量テンソルを定義すると

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle, \quad (9.68)$$

である。計算は省略するが<sup>\*14</sup>、 $\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$  を具体的に計算すると次の公式を得る。

重力波のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h^{\alpha\beta}{}_{;\mu} h_{\alpha\beta;\nu} \rangle_{\text{TT}}. \quad (9.69)$$

## 9.7 連星が放射する重力波のエネルギー

連星系から放射される重力波の全エネルギーは、十分遠方で重力波のエネルギー流束  $c(T^{\text{GW}})^{0i}$  を表面積分すれば得られる。計算は省略するが<sup>\*15</sup>、結果として次式を得る。

<sup>\*14</sup> 具体的な表式は第一回目の講義で紹介した、参考文献を見ること。どの教科書にも載っている。複数の項が存在するが、重力波の数波長に渡る平均操作により、ほとんどの項は消えてしまう。

<sup>\*15</sup> (9.69) 式に (9.43) 式を代入して、十分遠方なので共変微分は偏微分に置き換えればよく、 $h_{jk} = f_{jk}(t-r/c)/r$  より

$$h_{jk,i} n^i = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{f_{jk}(t-r/c)}{r} \right\} n^i = -h_{jk,0} - \frac{1}{r} h_{jk}, \quad (9.70)$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{GW}}}{dt} &= \int_S c (T_{\text{GW}})^0{}_i n^i r^2 d\Omega \\ &= \frac{c^5}{32\pi G} \eta^{00} \int_S \langle h^{jk}{}_{,0} h_{jk,i} \rangle_{\text{TT}} n^i r^2 d\Omega \\ &= \frac{c^5}{32\pi G} \int_S \left\langle h^{jk}{}_{,0} \left( h_{jk,0} + \frac{1}{r} h_{jk} \right) \right\rangle_{\text{TT}} r^2 d\Omega \\ &= \frac{G}{8\pi c^5} \int_S \left\langle \ddot{Q}^{jk} \ddot{Q}_{jk} - 2n^i n^j \ddot{Q}^{ik} \ddot{Q}_{kj} + \frac{1}{2} (n^i n^j \ddot{Q}_{ij})^2 \right\rangle d\Omega \\ &= \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle, \end{aligned} \quad (9.71)$$

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{dt} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle. \quad (9.72)$$

- 連星の場合の四重極モーメント、(9.47) 式を代入すると、

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{dt} = \frac{128}{5} \frac{Gm^2 R^4 \omega^6}{c^5} = \frac{2}{5} \frac{G^4 m^5}{c^5 R^5} = \frac{1}{80} \frac{c^5}{G} \left( \frac{r_g}{R} \right)^5, \quad (9.73)$$

となる。ここで、 $\omega$  を  $R$  に直すのに Kepler の法則、 $\omega^2 = Gm/(4R^3)$  を用いた<sup>\*16</sup>。  $r_g = 2Gm/c^2$  は Schwarzschild 半径である。

- (9.73) 式に現れた係数  $c^5/G$  は光度の次元 [J/s] を持っており、 $R$  は  $r_g$  より小さくならないので、 $c^5/G$  が重力波放射による光度のおよその最大値を与える。実際に計算してみると  $L_G \equiv c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$  J/s となり、膨大な光度 (天文学で知られている現象の中で最大光度) となる。
- ブラックホール連星が合体する瞬間には、連星間距離  $2R$  はブラックホール半径の 2 倍と等しくなるので、 $R = r_g$  である。すなわち、 $L_G$  ほどの重力波のエネルギー放射が起こることになる。実際、重力波が初観測された時のブラックホール連星合体 (GW150914) では、36 太陽質量と 29 太陽質量とブラックホールが合体し、62 太陽質量の大きなブラックホールになった。すなわち、3 太陽質量程度のエネルギーが重力波によって 0.1 秒ほどの間に持ち去られたので、光度は  $\sim 10^{49}$  J/s であった。(9.73) 式で  $R = 2r_g$  とすると、ほぼ同じ値になっている。
- 実験室で重力波を生成できるだろうか。非常に大胆かつ危険な実験として、 $m = 100$  kg,  $R = 1$  m のダンベルを  $\omega = 2\pi \times 100$  Hz で回転させることを考える。そうすると、 $dE_{\text{GW}}/dt \approx 4 \times 10^{-31}$  J/s となり、重力波振幅に換算すると  $h \lesssim 10^{-43}$  である。重力波を実験室で生成して検出することは非現実的であることが分かる。

## 9.8 演習問題

[問 1] Einstein 方程式を線形化し、重力波の波動方程式を導出せよ。

[問 2] 重力波のエネルギー運動量テンソルの導出を自分で確認せよ。ここで用いた次元解析によるオーダー見積もりの方法は理論物理学の重要なテクニックの 1 つである。

[問 3] (発展) 重力波放射エネルギーの四重極公式の導出について注釈の計算を確認せよ。

を得る。この計算の 3 行目から 4 行目では射影テンソルの具体形を用いている。

<sup>\*16</sup> Kepler の法則はここでは各星の質量を  $m$ , 円軌道の半径を  $R$  と書いている。よく用いられるのは、全質量  $m = m_1 + m_2$  と星の間の距離  $R$  であり、同じ文字でも 2 倍違うので注意すること。